Thème 3–4 : Modèles démographiques

1 Modélisation des effectifs de population

Afin de déterminer le nombre d'individu d'une population, on effectue un nombre fini de mesures sur une certaine durée. La population est donc une **grandeur discrète**.

1.1 Variations absolues et relatives

On considère une population dont le nombre d'individus change au cours du temps. On note la valeur de départ V_D et la valeur d'arrivée V_A.

Définition 1 (Variation absolue)
La **variation absolue** ΔV est donnée par

$$\Delta V = V_A - V_D.$$

Définition 2 (Variation relative)
La **variation relative** (ou **taux d'évolution**) t est le quotient de la variation absolue par V_D. On a donc

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}.$$

Remarque
Si la quantité **augmente**, les variations sont **positives**. Si la quantité **diminue**, alors les variations sont **négatives**.

Application 1

1. La capacité d'un stade est passée de 15000 à 21000 places. Calculer la variation absolue et le taux d'évolution de la capacité du stade.
2. L'entreprise qui a effectué les travaux employait 800 personnes il y a un an ; elle en emploie aujourd'hui 700. Calculer la variation absolue et le taux d'évolution de l'effectif de l'entreprise.
3. Expliquer la différence entre variation absolue et variation relative.

1.2 Suites

Pour modéliser une grandeur discrète, on utilise une **suite**.

Définition 3 (Suite)
Une **suite** u est une liste ordonnée de nombres.

Exemple 2
La liste suivante définit une suite :

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$$

Notation 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On note $u(n)$ la valeur de la suite correspondant au terme de rang n.

Exemple 3

On peut définir une suite u par $u(0) = 1$, $u(1) = 3$, $u(2) = 5$, $u(3) = 7$, $u(4) = 9$, *etc.*

Application 4

On s'intéresse à la population du village de Triffouilli-Les-Oies. En 2010, le village comptait 580 habitants. Chaque année, il y a 10 décès dans le village et 15 naissances. On note $u(n)$ le nombre d'habitant dans le village n années après 2010. On a donc $u(0) = 580$.

1. (a) Combien y aura-t-il d'habitants dans le village en 2011 ?

   (b) En déduire la valeur de $u(1)$.
2. (a) Combien y aura-t-il d'habitants dans le village en 2012 ?

   (b) En déduire la valeur de $u(2)$.
3. Donner les valeurs de $u(3)$ et $u(4)$.
4. Que représente la valeur $u(13)$?

2 Modèle linéaire – Suite arithmétique

Dans ce modèle, la population subit une évolution dont la variation absolue est constante au cours du temps.

Définition 5 (Suite arithmétique)

Une suite est dite **arithmétique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre. On appelle ce nombre la **raison** de la suite et on le note souvent r. Autrement dit, pour tout entier naturel n, on a

$$u(n+1) = u(n) + r.$$

Propriété 1

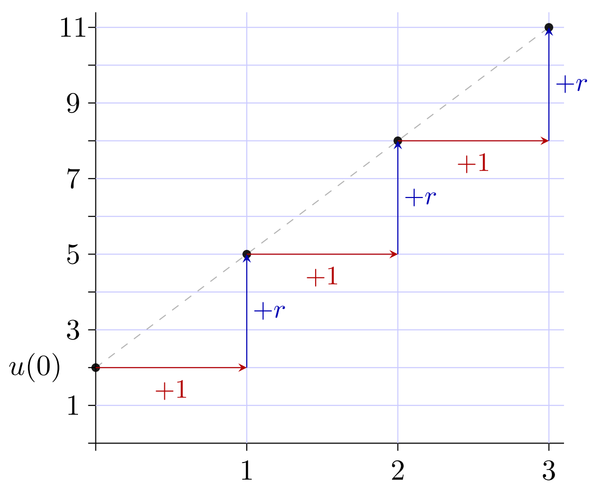
Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n) = u(0) + n \times r.$$

Propriété 2

Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$. La représentation graphique de la suite u est un nuage de points. Ces points sont alignés, c'est-à-dire qu'ils appartiennent tous à une même droite.

Ci-contre, on a représenté la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u(0) = 2$.



Application 5

Soit u une suite arithmétique de raison 5, dont le premier terme est $u(0) = -7$.

1. Calculer les termes $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
2. Calculer $u(2023)$.

3 Modèle exponentiel – Suite géométrique

Dans ce modèle, la population subit une évolution dont la variation relative est constante au cours du temps.

Définition 6 (Suite géométrique)

Une suite est dite **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. On appelle ce nombre la **raison** de la suite et on le note souvent q. Autrement dit, pour tout entier naturel n, on a

$$u(n+1) = u(n) \times q.$$

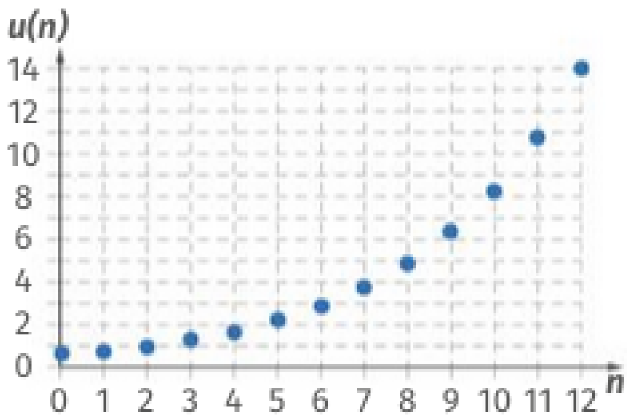
Propriété 3

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u(0)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n) = u(0) \times q^n.$$

Propriété 4

Une suite géométrique de raison $q > 1$ est représenté par un nuage de points qui « montent de plus en plus vite ». On dit que la croissance d'une telle suite est « exponentielle ».



Application 6

Soit u une suite géométrique de raison 1,1, dont le premier terme est $u(0) = 2$.

1. Calculer les termes $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
2. Calculer $u(2023)$.

4 Modèle démographique de Malthus

Thomas Robert Malthus (1766-1834) était un économiste britannique. Malthus modélise la population par une suite géométrique dont la raison est déterminée par la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité. Ce modèle est valide sur des temps courts mais irréaliste sur des temps longs, en raison de l'insuffisance des ressources (nourriture, énergie, logement, *etc.*).