Thème 3–1 : Équilibre de Hardy-Weinberg

1 Théorie des probabilités

Propriété 1

Soit

— f la **fréquence** d'individus associés à une donnée (ou à une caractéristique)

— n l'**effectif** de cette donnée

— N la **population totale** de l'échantillon

on a alors

$$f = \frac{n}{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad n = f \times N \qquad \Leftrightarrow \qquad N = \frac{n}{f}$$

Exemple 1

On considère une classe de 30 élèves dont 5 sont gauchers. La donnée (ou caractéristique) est ici le fait d'être gaucher, et on on a donc $n = 5$ et $N = 30$. On calcule la fréquence des gauchers comme suit :

$$f = \frac{n}{N} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

Application 2

D'après l'INSEE (Institut national de la statistique et des études économiques), en 2019, en France métropolitaine, 9,2 millions de personnes vivent sous le seuil de pauvreté monétaire. Le taux de pauvreté est ainsi de 14,6%.
Combien y avait-il d'habitants en France métropolitaine en 2019 ?

Définition 1 (Expérience aléatoire)

Dans la théorie des probabilités, on s'intéresse à des **expériences aléatoires**, c'est-à-dire dont on ne connaît pas l'issue avant d'avoir fait l'expérience.

Exemple 3

Jeter un dé équilibré à six faces (numérotées de 1 à 6) constitue une expérience aléatoire : on ne sait pas à l'avance quel nombre on va obtenir.

Définition 2 (Événement et probabilité)

Un **événement** A est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire, on note généralement $P(A)$ (parfois aussi $\mathbb{P}(A)$, $p(A)$, p_A, *etc.*) sa **probabilité**, c'est-à-dire la chance que l'événement se réalise.

Exemple 4

On considère l'expérience suivante : on jette une pièce de monnaie parfaitement équilibré et on s'intéresse au fait d'obtenir pile ou face. On considère l'événement A : « la pièce tombe sur pile ».

Alors la probabilité $P(A)$ de l'événement A est

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%.$$

En d'autres termes, on a une chance sur deux d'obtenir pile.

Application 5

On lance un dé équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égale à 5 ?

Propriété 2

Soit f la fréquence d'individus associés à une donnée, dans une population. Alors, la probabilité p de choisir un individu correspondant à la donnée étudiée lorsqu'on choisit quelqu'un au hasard dans la population est

$$p = f.$$

Exemple 6

On reprend l'exemple de la classe avec 30 personnes dont 5 personnes gauchères. On considère l'expérience suivante : on choisit une personne au hasard dans la classe. Alors la probabilité p de chosir une personne gauchère est égale à

$$p = f = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 \approx 17\%.$$

Propriété 3

Soit A et B deux événements. Si A et B sont deux événements **indépendants**, alors la probabilité que A et B aient soient réalisés simultanément, notée $P(A \cap B)$, est donnée par

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple 7

Toujours dans la même classe de 30 personnes, on suppose que 60% des élèves sont demi-pensionnaire. On suppose que le fait d'être demi-pensionnaire est indépendant du fait d'être gaucher ou droitier. On note A l'événement « choisir au hasard une personne gauchère » et B « choisir une personne demi-pensionnaire ». Alors la probabilité de choisir au hasard une personne qui soit gauchère et demi-pensionnaire est

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{60}{100} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%.$$

Application 8

On réalise le jeu suivant : on jette un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 puis une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On suppose que le jet de dé n'a aucune influence sur le jet de pièce, c'est-à-dire que les deux lancers sont indépendants. On gagne le jeu si on obtient un nombre supérieur ou égale à 4 avec le dé et que la pièce tombe sur « face ».
Quelle est la probabilité de gagner ce jeu ?

2 Équilibre de Hardy-Weinberg

2.1 Hypothèses

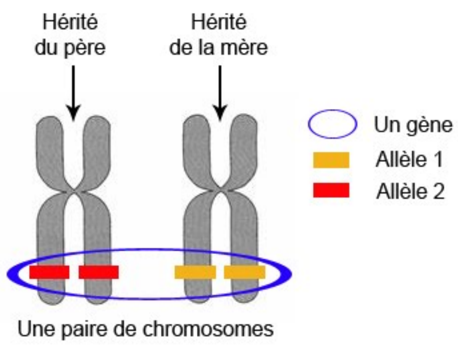
On rappelle que

— les chromosomes viennent **par paire** ;

— les **gènes** sont situés sur les chromosomes et permettent de « coder » les informations qui nous caractérisent (groupe sanguin, *etc.*) ;

— plusieurs « versions » d'un gène peuvent exister, on appelle ces versions des **allèles** ;

— le **génotype** d'un individu est sa composition allélique : la donnée des deux allèles présents sur ses gènes.



Dans notre modèle, on supposera aussi que

— on considère un gène possédant **uniquement deux allèles**, notées a et A ;

— on étudie une **population de grande taille** ;

— il n'y a **aucune migration** parmi la population ;

— il n'y a **pas de mutation** ;

— il n'y a **pas de sélection naturelle** ;

— on est dans un cas de **panmixie** (reproduction aléatoire des individus).

Propriété 4

Il y a dans ce cas uniquement trois génotypes différents : $(a//a)$, $(a//A)$ et $(A//A)$.

Lors d'une étude génétique d'une population de N individus, ce qui nous intéressera sera alors le nombre $n_{(a//a)}$ d'individus portant le génotype $(a//a)$, mais aussi les nombres $n_{(a//A)}$ et $n_{(A//A)}$ d'individus portant les génotypes $(a//A)$ et $(A//A)$. On s'intéresse aussi aux fréquences associées

$$f_{(a//a)} = \frac{n_{(a//a)}}{N} \qquad f_{(a//A)} = \frac{n_{(a//A)}}{N} \qquad f_{(A//A)} = \frac{n_{(A//A)}}{N}.$$

On peut déduire de ces informations le nombre d'allèles a et A présents dans la population. Chaque génotype $(a//a)$ présente 2 allèles a, chaque génotype $(A//A)$ présente deux allèles A, et le génotype $(a//A)$ présente un allèle de chaque type. Le nombre d'allèle total est donc

$$n_a = 2 \times n_{(a//a)} + n_{(a//A)} n_A = 2 \times n_{(A//A)} + n_{(a//A)}$$

Puisqu'il y a N individus, il y aura $2 \times N$ gènes, les fréquences associées sont donc

$$\begin{aligned} f_a &= \frac{n_a}{2N} \\ &= \frac{2n_{(a//a)} + n_{(a//A)}}{2N} \\ &= \frac{n_{(a//a)}}{N} + \frac{1}{2} \times \frac{n_{(a//A)}}{N} \\ &= f_{(a//a)} + \frac{1}{2} f_{(a//A)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_A &= \frac{n_A}{2N} \\ &= \frac{2n_{(A//A)} + n_{(a//A)}}{2N} \\ &= \frac{n_{(A//A)}}{N} + \frac{1}{2} \times \frac{n_{(a//A)}}{N} \\ &= f_{(A//A)} + \frac{1}{2} f_{(a//A)} \end{aligned}$$

On résume tout cela dans la propriété suivante, qui est à retenir.

Propriété 5

On peut calculer les fréquences alléliques f_a et f_A à partir des fréquences génotypiques $f_{(a//a)}$, $f_{(a//A)}$ et $f_{(A//A)}$. On a en effet les formules suivantes.

$$f_a = f_{(a//a)} + \frac{1}{2} f_{(a//A)} \qquad f_A = f_{(A//A)} + \frac{1}{2} f_{(a//A)}$$

2.2 Équilibre de Hardy-Weinberg

Lors de la reproduction, la transmission de l'un ou l'autre des allèles se fait au hasard. On suppose que la probabilité de transmission d'un allèle est égale à sa fréquence, ce qui donne le résultat suivant.

Propriété 6

Soit p la fréquence de l'allèle a à la génération 0 et $q = 1 - p$ celle de A. Alors les fréquences génotypiques à la génération 1 (la suivante) sont données par le tableau suivant.

	a (p)	A (q)
a (p)	$(a//a)$ (p^2)	$(a//A)$ (pq)
A (q)	$(A//a)$ (pq)	$(A//A)$ (q^2)

On en déduit les fréquences génotypiques

$$f_{(a//a)} = p^2 \qquad f_{(a//A)} = 2pq \qquad f_{(A//A)} = q^2.$$

puis les fréquences alléliques

$$\begin{aligned} f_a &= p^2 + pq \\ &= p^2 + p(1-p) \\ &= p^2 + p - p^2 \\ &= p \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_A &= q^2 + pq \\ &= q^2 + q(1-q) \\ &= q^2 + q - q^2 \\ &= q \end{aligned}$$

Propriété 7

Les fréquences alléliques restent les mêmes d'une génération à une autre, c'est ce qu'on appelle **l'équilibre de Hardy-Weinberg**.

Si jamais les résultats théoriques ne correspondent pas aux résultats observés, cela signifie qu'une des hypothèses du modèle n'est pas vérifiée. Cela peut-être dû à

— de la sélection naturelle ;

— de la migration ;

— une sélection des partenaires sexuels (hypothèse de panmixie incorrecte) ;

— *etc.*