Chapitre 3 : Géométrie dans le plan

1 Coordonnées d'un point du plan

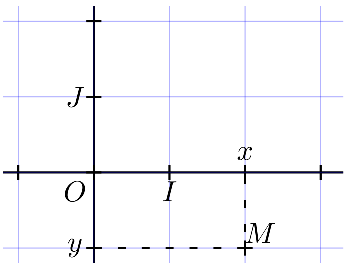
1.1 Repères du plan

Définition 1 (Repère, origine, et axes)

Soient O, I et J trois points distincts du plan. On dit que le triplet $(O; I, J)$ forme un repère du plan lorsque les points O, I, et J ne sont pas alignés. Dans ce cas :
- le point O est **l'origine** du repère ;
- la droite orientée (OI) est **l'axe des abscisses** et la distance OI donne l'unité sur cet axe ;
- la droite orientée (OJ) est **l'axe des ordonnées** et la distance OJ donne l'unité sur cet axe.

Définition 2 (Coordonnées)

Repérer un point M dans un repère $(O; I, J)$, c'est donner l'unique couple de nombres réels $(x; y)$ appelé **coordonnées** du point M. Le nombre x est **l'abscisse** du point M et le nombre y est **l'ordonnée** du point M.



Exemple 1

Dans le repère juste au-dessus, les coordonnées des points O, I, J, et M sont respectivement $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ et $(2; -1)$.

Remarque

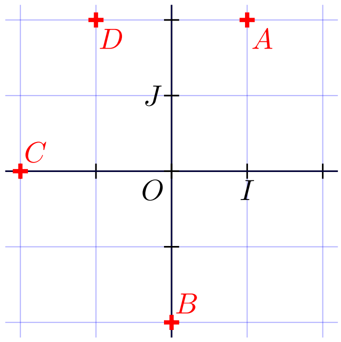
Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, le repère $(O; I, J)$ est **orthogonal**. Si, de plus, les longueurs OI et OJ sont égales, alors $(O; I, J)$ est dit **orthonormé**.

Notation 3

On écrit souvent les coordonnées d'un point A à l'aide de la notation $A(x_A; y_A)$.

Exemple 2

— L'ordonnée du point A est 2.
— L'abscisse du point B est 0.
— Les coordonnées de C sont $(-2; 0)$.
— Les coordonnees de D sont $(-1; 2)$.



1.2 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 1
Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(x_K; y_K)$ définies par

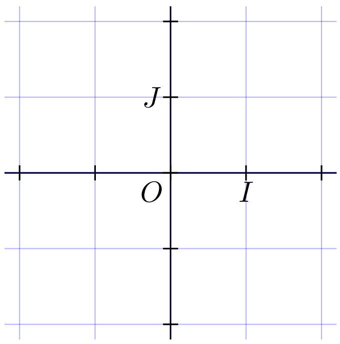
$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Remarque
L'abscisse de K est la moyenne des abscisses de A et B. L'ordonnée de K est la moyenne des ordonnées de A et B.

Exemple 3

Soients $A(1; 1)$, $B(-2; 0)$, $C(-1; -2)$ et $D(2; -1)$ quatre points dans un repère $(O; I, J)$.

1. Placer ces points dans le repère ci-contre.
2. Calculer les coordonnées de K, le milieu de $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées de L, le milieu de $[BD]$.
4. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?



2 Distance dans un repère orthonormé

Propriété 2
Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple 4
Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé et $A(-1; 2)$ et $B(4; 3)$, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}.$$

Application 5

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ du plan, on considère les points A, B, C et M de coordonnées respectives $(-2; 3)$, $(3; 4)$, $(3; -2)$ et $(1; 1)$.
Montrer que A, B, et C appartiennent à un même cercle de centre M.

Propriété 3

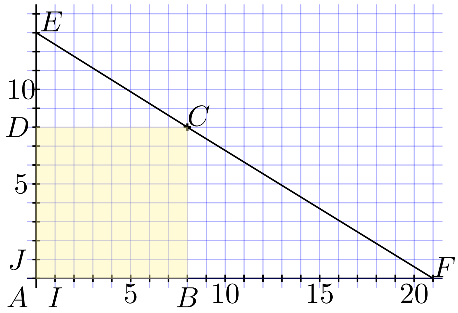
Soient A, B et C trois points distincts du plan. Les points A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si, $AC = AB + BC$.

Exemple 6

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé et $A(-2; -2)$, $B(3; 1)$ et $C(8; 4)$ trois points de ce repère.
Ces points sont-ils alignés ?

Exemple 7

Dans le repère orthonormé $(A; I, J)$, on considère la figure ci-contre composée d'un carrée $ABCD$ et de deux points E et F. Les points E, C et F sont-ils alignés ?



3 Configurations du plan

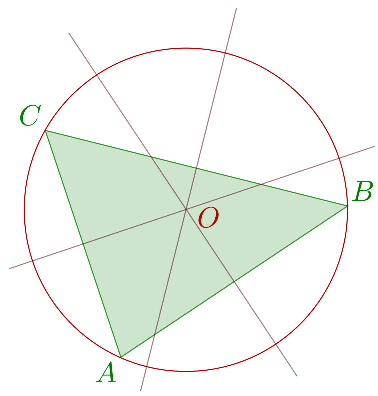
3.1 Propriétés dans le triangle

Définition 4 (Cercle circonscrit)

Le **cercle circonscrit** à un triangle est le cercle passant par les trois sommets du triangle.

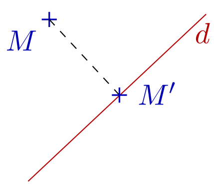
Propriété 4

Dans un triangle, les médiatrices des côtés sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Définition 5 (Projeté orthogonal)

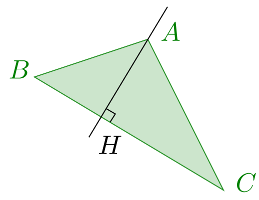
Soient d une droite et M un point extérieur à d.
On dit que M' est le **projeté orthogonal** de M lorsque le point M' appartient à la droit d et que les droites (MM') et d sont perpendiculaires.



Propriété 5
Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M.

Définition 6 (Hauteur)

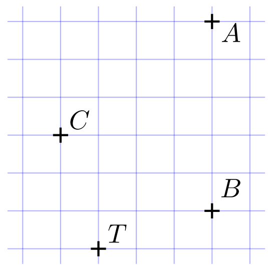
Dans un triangle ABC, la **hauteur** issue du sommet A est la droite passant par A et par H, le projeté orthogonal de A sur (BC) : il s'agit de la droite (AH).



Application 8

On considère les points dans le repère ci-contre.

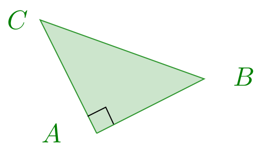
1. En utilisant les carreaux, justifier que la droite (AT) est la médiatrice du segment $[BC]$.
2. Que peut-on déduire pour les droites (BC) et (AT) ?



3.2 Trigonométrie

Définition 7 (Cosinus et sinus)
Soit ABC un triangle rectangle en A. On définit alors le **cosinus** et le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ de la façon suivante.

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \text{ et } \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}.$$



Propriété 6
Si α est la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle alors $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Application 9

1. Démontrer que le triangle ABC tel que $AB = 12$, $BS = 5$ et $AC = 13$ est rectangle.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

3.3 Quadrilatères

Définition 8 (Parallélogramme)
Un parallélogramme $ABCD$ est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Propriété 7
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Ce point est un centre de symétrie du quadrilatère. Ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.

Définition 9 (Autres parallélogrammes)
Les carrés, les losanges et les rectangles sont des parallélogrammes. Toutes les propriétés des parallélogrammes s'appliquent à eux, mais ils vérifient aussi d'autres propriétés :
Rectangle : tous ses angles sont droits et ses diagonales sont de même longueur.
Losange : les diagonales sont perpendiculaires et tous ses côtés sont de même longueur.
Carré : c'est à la fois un rectangle et un losange.