Chapitre 5 : Généralités sur les fonctions

1 Définitions

1.1 Fonctions, images, antécédents

Définition 1 (Fonction)

Définir une **fonction** f sur un ensemble de réels D consiste à associer à chaque réel $x \in D$ un unique réel y.
Pour signifier que y est le réel associé à x par la fonction f, on note $y = f(x)$. On note cette correspondance comme suit.

$$f : \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 2 (Ensemble de définition, image et antécédent)

— L'ensemble D est appelé l'**ensemble de définition** de f : il s'agit donc de l'ensemble des réels x ayant un réel y associé par f.

— On dit que y est l'**image** de x par f.

— On dit que x est un **antécédent** de y par f.

Remarque

On peut nommer la fonction par une autre lettre que f (g, u, v, etc.). De même, on peut remplacer la variable x par une autre (t, ℓ, etc.)

Exemple 1

On observe la température d'une pièce pendant 24 heures. À chaque instant t de la journée correspond donc une température unique, notée $f(t)$. La fonction f est donc définie sur $D = [0; 24]$.

— S'il fait 12°C au bout d'une heure, on notera $f(1) = 12$.

— S'il fait 18,7°C au bout de six heures, on notera $f(6) = 18{,}7$.

— Écrire $f(4) = f(18)$ veut dire que la température était identique au bout de 4 heures et au bout de 18 heures.

Les températures atteintes plusieurs fois dans la journée ont plusieurs antécédents : la température 20°C peut par exemple être atteinte plusieurs fois dans la journée).

Application 2

Un élève entre un nombre à la calculatrice puis il appuie sur la touche $\boxed{x^2}$.

1. Justifier que cela revient à définir une fonction f que l'on précisera.
2. Par cette fonction f, déterminer
   (a) l'image de 0 et ses éventuels antécédents ;
   (b) l'image de 2 et ses éventuels antécédents ;
   (c) l'image de -1 et ses éventuels antécédents.

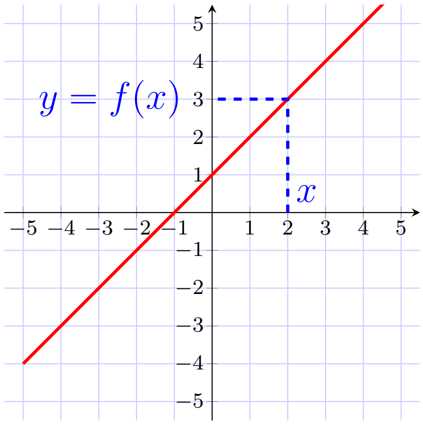
1.2 Définir une fonction

Définition 3 (Définition d'une fonction)

Il y a trois principaux modes de définition d'une fonction f permettant d'associer à un réel $x \in D$, où D est l'ensemble de définition, son image y.

1. Avec une **relation algébrique** : on connaît directement l'expression de $f(x)$ en fonction de x. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x + 1.$$
2. Avec un **tableau de valeurs** : on donne explicitement les images associées à différentes valeurs de x. Par exemple, ici, $f(2) = 3$, $f(-1) = 0$.
3. Avec une **courbe** : la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = f(x)$.

x	-1	2	5	10
f(x)	0	3	6	11



Application 3

On considère la fonction f définie sur $D = [-2; 7]$ par $f(x) = 6x - x^2$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)									

2. Utiliser ce tableau pour tracer la courbe représentative de f.

2 Résolution graphique d'équations

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes de f et g dans un repère orthogonal.

2.1 Résolution graphique du type $f(x) = k$

Définition 4 (Résolution d'équation du type $f(x) = k$)

Soient f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé. Résoudre l'équation $f(x) = k$:

— consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont pour image k ;

— revient donc à déterminer l'ensemble des antécédents de k par f.

Propriété 1

Graphiquement, les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses de tous les points de $\mathscr{C}_f$ ayant pour ordonnée k.

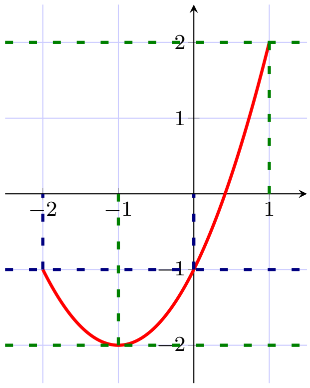
Exemple 4

On considère la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2;1]$.

— L'équation $f(x) = -2$ admet une solution ($x = -1$).

— L'équation $f(x) = -1$ admet deux solutions ($x = -2$ et $x = 0$).

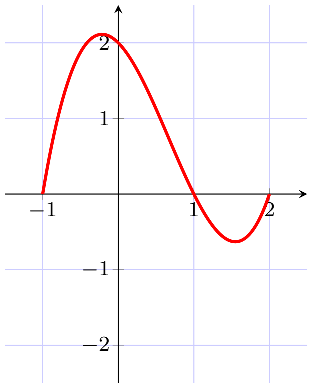
— L'équation $f(x) = 2$ admet une solution ($x = 1$).



Application 5

On considère la représentation graphique ci-contre d'une fonction f définie sur $[-1;2]$.

1. Résoudre graphiquement (approximativement) l'équation $f(x) = 1$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$.



2.2 Résolution graphique du type $f(x) = g(x)$

Définition 5 (Résolution d'équation du type $f(x) = g(x)$)

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D. Résoudre l'équation

$$f(x) = g(x)$$

consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont la même image par f et par g.

Propriété 2

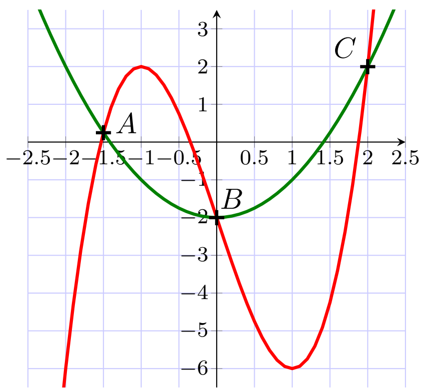
Graphiquement, les solutions de

$$f(x) = g(x)$$

sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g.

Exemple 6

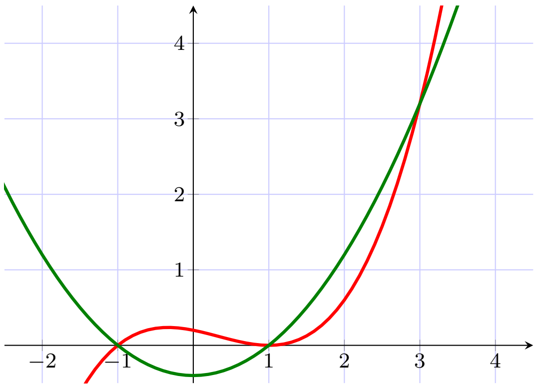
On considère les deux représentations graphiques dans le repère orthogonal ci-contre.
Ces courbes ont exactement trois intersections : A, B et C d'abscisses respectives $-1{,}5$; 0 et 2.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est donc $\mathscr{S} = \{1{,}5; 0; 2\}$.



Application 7

On considère les deux représentations graphiques de deux fonctions f et g dans le repère orthogonal ci-contre.
Résoudre graphiquement l'équation

$$f(x) = g(x).$$



3 Sens de variation

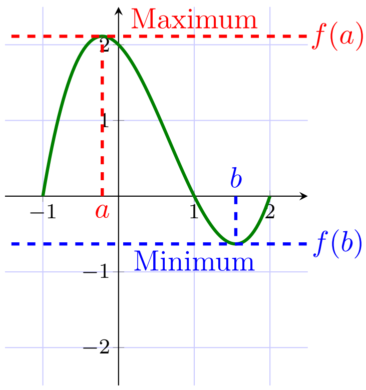
3.1 Extremum

Définition 6 (Maximum)
Le **maximum** d'une fonction f définie sur un intervalle I est, s'il existe, la plus grande valeur possible des images, atteinte pour un réel a de I. Ainsi, pour tout réel x de I, on a

$$f(x) \leq f(a)$$

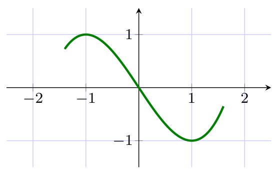
Définition 7 (Minimum)
Le **minimum** d'une fonction f définie sur un intervalle I est, s'il existe, la plus petite valeur possible des images, atteinte pour un réel b de I. Ainsi, pour tout réel x de I, on a

$$f(x) \geq f(b)$$



Application 8

On représente ci-contre une fonction f. Donner le maximum et le minimum de f.

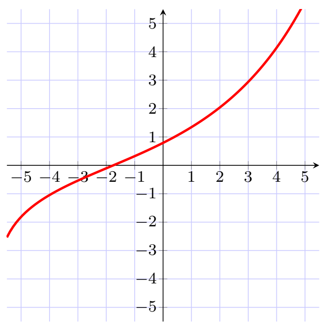


3.2 Sens de variation

Définition 8 (Fonction croissante)

La fonction f est dite **croissante** sur l'intervalle I lorsque, pour tous réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leq x_2$, alors

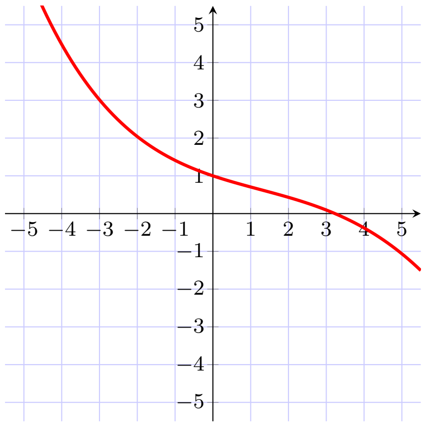
$$f(x_1) \leq f(x_2).$$



Définition 9 (Fonction décroissante)

La fonction f est dite **décroissante** sur l'intervalle I lorsque, pour tous réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leq x_2$, alors

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$



Définition 10 (Fonction constante)

La fonction f est dite **constante** sur l'intervalle I lorsque, pour tous réels x_1 et x_2 de I, on a

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Définition 11 (Tableau de variation)

Pour représenter les variations d'une fonction f, on utilise un tableau avec des flèches représentant les variations sur des intervalles les plus grands possibles.

- On utilise une flèche vers le haut pour représenter une fonction croissante.
- On utilise une flèche vers le bas pour représenter une fonction décroissante.
- Si on les connaît, on écrit les images au bout des flèches.

L'ensemble forme le **tableau de variations** de f.

Application 9

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-10		-5		2		4
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	1

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner $f(2)$.
3. (a) Le maximum de f sur $[-10; 4]$ est .... Il est atteint en $x =$ ....
   (b) Le maximum de f sur $[2; 4]$ est .... Il est atteint en $x =$ ....
   (c) Le minimum de f sur $[-10; 4]$ est .... Il est atteint en $x =$ ....
4. Comparer les nombres suivants (dire lequel est le plus grand). Justifier.
   (a) Les nombres $f(-7)$ et $f(-5)$.
   (b) Les nombres $f(-4)$ et $f(0)$.
   (c) Les nombres $f(-1)$ et $f(3)$.
5. (a) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-5; 2]$.
   (b) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-10; 2]$.
6. Dessiner la courbe représentative d'une fonction f qui pourrait avoir ce tableau de variations.