Chapitre 8 : Fonctions affines

1 Caractérisation des fonctions affines

1.1 Définitions

Définition 1 (Fonction affine)

Une fonction f est dite **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = mx + p.$$

— Le nombre m est appelé le **coefficient directeur** de f.

— Le nombre p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de f.

Définition 2 (Fonction constante)

Si f est une fonction affine telle que $m = 0$, alors la fonction f est une fonction **constante**.

Définition 3 (Fonction linéaire)

Si f est une fonction affine telle que $p = 0$, alors la fonction f est une fonction **linéaire**.

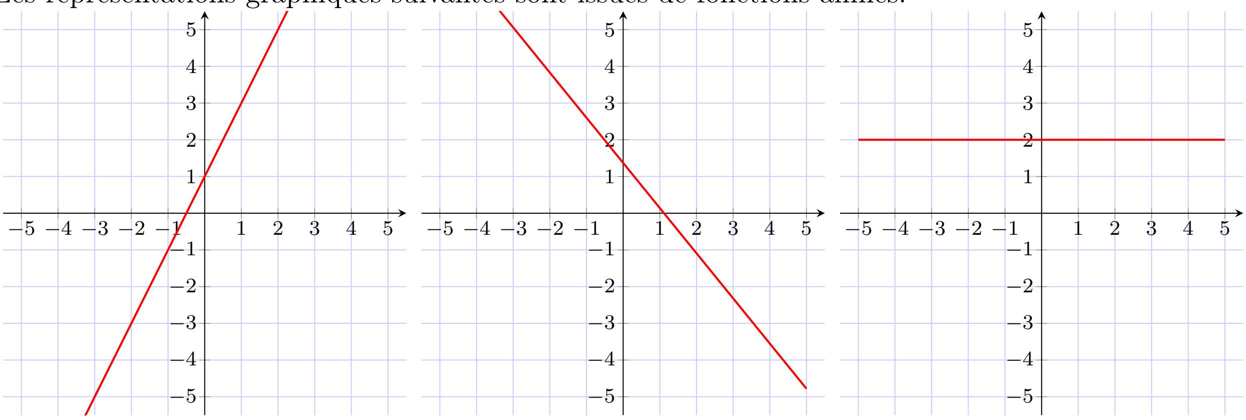
1.2 Représentation graphique

Propriété 1

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, la courbe représentative d'une fonction f est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) si, et seulement si, f est une fonction affine.

Exemple 1

Les représentations graphiques suivantes sont issues de fonctions affines.



Propriété 2

Soit f une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Pour représenter f, il suffit de placer deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ avec $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$ puis de tracer la droite passant par ces deux points.

Application 2

Représenter dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ la fonction affine h définie par $h(x) = \frac{4}{3}x - 2$.

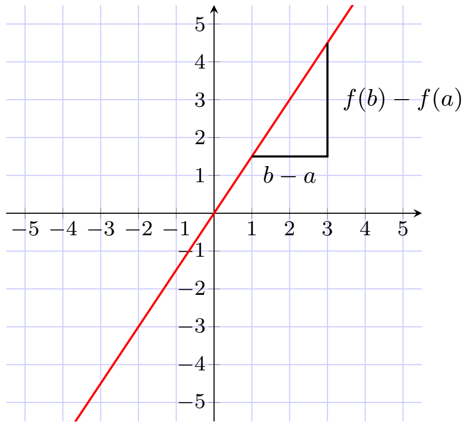
1.3 Propriétés des fonctions affines

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

est constant.



Application 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

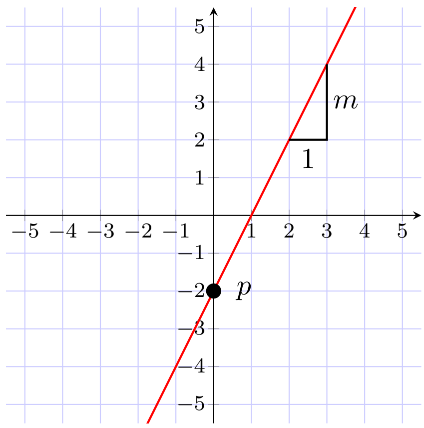
1. La fonction f est-elle affine ? Si oui, donner son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.
2. Calculer le nombre
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
pour

1) $a = 1, b = 3$ **2)** $a = -1, b = 2$ **3)** $a = 7, b = -5$

Propriété 4

Soient f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a, b deux réels distincts. Alors

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ et } p = f(0).$$



Application 4

Soit f une fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$. Donner l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de f.

Application 5

Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Justifier.

1) $f(x) = x + 1$ **2)** $g(x) = x^2 - 1$

2 Étude d'une fonction affine

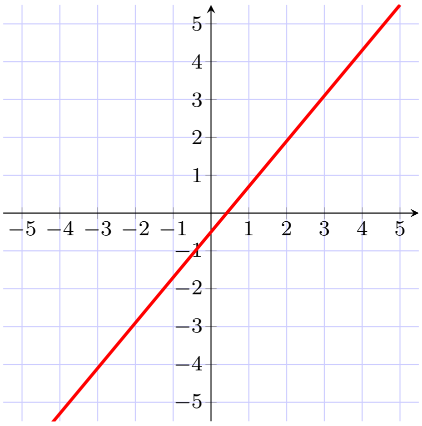
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont des nombres réels.

2.1 Sens de variation

Propriété 5

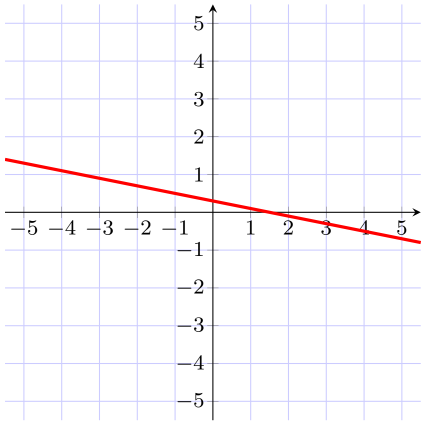
Si $m \geq 0$

La fonction f est croissante.



Si $m \leq 0$

La fonction f est décroissante.



Application 6

Soit $a \in [-3; -2]$ et g une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x + 5$. Déterminer un encadrement de $g(a)$.

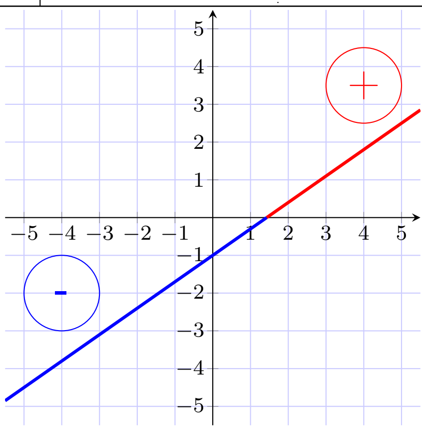
2.2 Signes

Propriété 6

Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \iff mx + p = 0 \iff x = -\frac{p}{m}$. On a ainsi les tableaux de signes suivants.

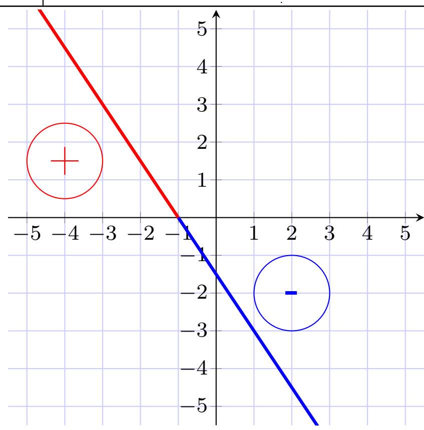
Si $m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



Si $m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	



Application 7

Dresser le tableau de signes de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -3x + 4$.

Application 8

Résoudre l'inéquation $(3x + 2)(-2x - 1) \leq 0$. *On pourra faire un tableau de signes.*