Chapitre 1 : Ensembles de nombres

1 Ensembles de nombres

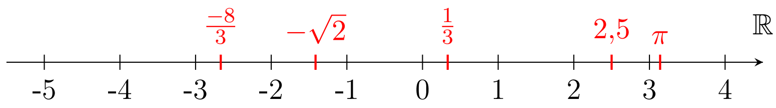
Notation

Le symbole $\in$ se lit «*appartient à*». Le symbole $\notin$ se lit «*n'appartient pas à*».

Exemple

On a $5 \in \mathbb{N}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.

Ensemble de nombres	Définition	Notation	Exemple	Contre-Exemple
Nombres *entiers* naturels	Un nombre entier *naturel* est un nombre entier positif ou nul.	$\mathbb{N}$	$1; 0; 12; 71$	$-3; 0{,}5$
Nombres *entiers* relatifs	Un nombre entier *relatif* est un nombre entier positif, négatif ou nul.	$\mathbb{Z}$	$-5; 0; 17$	$\frac{1}{4}; 2{,}7$
Nombres *décimaux*	Un nombre *décimal* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$	$\mathbb{D}$	$1{,}1; 3{,}27$	$\frac{1}{3}$
Nombres *rationnels*	Un nombre *rationnel* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$	$\mathbb{Q}$	$\frac{1}{3}$	$\pi; \sqrt{2}$
Nombres *réels*	On considère une droite graduée et à chaque point de la droite on associe un nombre, son abcisse. Les *nombres réels* sont les abcisses de tous les points de la droite graduée.	$\mathbb{R}$	π, $\sqrt{2}$	i



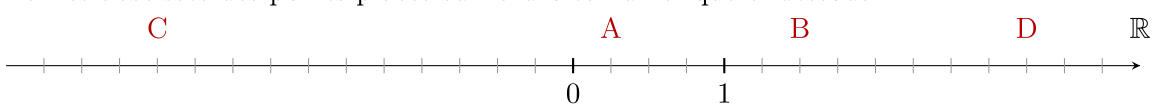
Exemple

Donner :

- un nombre appartenant aux deux ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$;
- un nombre appartenant à $\mathbb{Z}$ mais pas à $\mathbb{N}$;
- un nombre appartenant à $\mathbb{Q}$ mais pas à $\mathbb{D}$;
- deux nombres appartenant à $\mathbb{D}$;
- un nombre n'appartenant ni à $\mathbb{D}$, ni à $\mathbb{Q}$;
- un nombre irrationnel.

Exemple

Donner les abscisses des points placés sur la droite numérique ci-dessous.



Remarque
Un *nombre décimal* a une écriture décimale finie, et réciproquement, tout nombre qui a une écriture décimale finie est un nombre décimal.

Notation
Le symbole $\subset$ se lit «*est inclus dans*» et le symbole $\not\subset$ se lit «*n'est pas inclus dans*».

Propriété (admise)
On a
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque
Les symboles $\in$ et $\subset$ ne sont pas équivalents, attention à ne pas les confondre. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$; tandis qu'on a $-5 \in \mathbb{Z}$: le nombre -5 est *un élément* de $\mathbb{Z}$.

Exemple
Compléter les pointillés avec le symbole correspondant ($\in, \notin, \subset, \not\subset$).

$a)$ $8 \dots \mathbb{N}$ $b)$ $-7{,}5 \dots \mathbb{D}$ $c)$ $\frac{1}{4} \dots \mathbb{Z}$ $d)$ $\mathbb{D} \dots \mathbb{N}$ $e)$ $\sqrt{5} \dots \mathbb{Q}$

$f)$ $-\frac{6}{2} \dots \mathbb{Z}$ $g)$ $\frac{2}{3} \dots \mathbb{D}$ $h)$ $\mathbb{Z} \dots \mathbb{R}$ $i)$ $\pi \dots \mathbb{R}$ $j)$ $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}$

2 Arithmétique

2.1 Diviseurs et multiples

Définition (Diviseurs et multiples)
Soient a et b deux nombres entiers relatifs (donc $a,b \in \mathbb{Z}$). On dit que a est un *diviseur* de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$b = k \times a.$$
Dans ce cas, on dit aussi que
— b est un *multiple* de a ;
— a *divise* b ;
— b est *divisible* par a.

Exemple
1. Donner les diviseurs de 18, 12.
2. Donner les multiples de 7 inférieurs à 50.

Exemple
Simplifier les fractions suivantes

$$\frac{120}{39} = \qquad \frac{66}{42} = \qquad \frac{108}{32} =$$

2.2 Parité

Définition (Nombres pairs ou impairs)

Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier relatif, on dit que a est un nombre
- *pair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k$;
- *impair* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k + 1$.

Remarque

Ce sont les définitions que vous connaissiez déjà : un nombre est *pair* s'il est divisible par 2. On dit qu'il est *impair* s'il n'est pas divisible par 2.

Exemple

Expliquer pourquoi les nombres 12 ou 70 sont pairs. Expliquer pourquoi les nombres 13 ou 39 sont impairs.

2.3 Nombre premier

Définition (Nombre premier)

Un entier naturel est dit *premier* s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemple

Donner tous kes nombres premiers inférieurs à 10.

Remarque

Le nombre 1 **n'est pas un nombre premier** car il a un seul diviseur.

Exemple

Donner la décomposition comme produit de nombres premiers de chacun des nombres suivants.

$40 =$ $\qquad$ $12 =$ $\qquad$ $75 =$ $\qquad$ $126 =$

3 Intervalles

Définition (Intervalle)

Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui correspond à un segment, une demi-droite, ou à la droite toute entière.

3.1 Intervalle borné

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par un **segment** sur une droite graduée :	Notation de l'intervalle	Type de l'intervalle
$a \leq x \leq b$		$[a;b]$	
$a < x < b$		$]a;b[$	
$a \leq x < b$		$[a;b[$	
$a < x \leq b$		$]a;b]$	

Exemple

Compléter le tableau suivant.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par	Intervalle	Type de l'intervalle
$8 < x < 15$			
		$x \in]-2;1[$	

Remarque

L'ordre des réels a une importance. L'intervalle $[3;4]$ existe alors que $[4;3]$ n'existe pas. Pour les ensembles de solutions, écrits entre accolades, l'ordre n'a pas d'importance : $\{4;3\}$ existe.

3.2 Intervalle non borné

On considère deux réels $a,b \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par une **demi-droite** sur une droite graduée :	Notation de l'intervalle
$x \geq a$		$[a;+\infty[$
$x > a$		$]a;+\infty[$
$x \leq b$		$]-\infty;b]$
$x < b$		$]-\infty;b[$

Exemple

Compléter le tableau suivant.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par	Notation de l'intervalle
$x \leq 10$		
		$x \in]-2;+\infty[$