Chapitre 4 : Calcul littéral

1 Calculer avec des fractions

Soit a, b, c, et d des nombres réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Définition 1 (Écriture fractionnaire)

Le **quotient** du nombre a par b est le nombre a divisé par le nombre b. On peut écrire ce nombre sous la forme d'une **écriture fractionnaire**

$$\frac{a}{b}.$$

Le nombre a est appelé **numérateur** et le nombre b est appelé **dénominateur**.

Définition 2 (Inverse)

La fraction $\frac{d}{b}$ est **l'inverse** de la fraction $\frac{b}{d}$.

Propriété 1

On a

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a \times d = b \times c.$$

Exemple 1

Remplir avec les signes $=$ ou $\neq$, puis justifier.

— On a $\frac{2}{4} \dots \frac{1}{2}$ car

— On a $\frac{6}{36} \dots \frac{3}{12}$ car

— On a $\frac{2}{10} \dots \frac{1}{4}$ car

Propriété 2

On a les propriétés suivantes concernant la multiplication de fractions.

1) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ **2)** $\frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}$ **3)** $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

Exemple 2

Calculer les fractions suivantes, et donner le résultat sous forme simplifiée.

1. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$
2. $\frac{-2}{7} \times \frac{1}{3} =$
3. $\frac{-3}{5} \times \frac{-10}{7} =$
4. $3 \times \frac{5}{12} =$

Propriété 3

On a les propriétés suivantes concernant l'addition de fractions.

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ **2)** $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

Remarque

On doit mettre deux fractions **au même dénominateur** avant de les additionner ou les soustraire.

Exemple 3

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel, avec $x \neq 0$. Calculer les fractions suivantes :

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} =$

Propriété 4

Pour tous nombres réels a, b, c, et d, avec b, c et d non nuls, on a :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple 4

Calculer les fractions suivantes :

1. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} =$
2. $\frac{1}{\frac{3}{4}} =$

2 Calculer avec des puissances

Définition 3 (Puissances)

Si a est un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul, alors le nombre a^n est défini par le produit

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ termes}}$$

Ce nombre se lit « a puissance n » ou bien « a exposant n ».

Si a est un nombre réel non nul et n est un entier négatif, alors le nombre a^n est défini par

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Exemple 5

$10^3 =$ $\qquad$ $10^{-3} =$

Propriété 5

Pour tout réel a, et pour tous nombres entiers relatifs n et p, on a

1) $a^n \times a^p = a^{n+p}$ $\qquad$ **2)** $(a^n)^p = a^{n \times p}$ $\qquad$ **3)** $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ $(a \neq 0)$ $\qquad$ **4)** $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $(a \neq 0)$

Exemple 6

$10^5 \times 10^{-3} =$ $\qquad$ $\frac{3^{15}}{3^{11}} =$

Propriété 6
Pour tous nombres réels a et b, et pour tout nombre entier relatif n, on a :

1) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ **2)** $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemple 7

1) $10^3 \times 2^3 =$ **2)** $2^{-4} \times 3^{-4} =$ **3)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 =$

3 Identités remarquables

Propriété 7 (Distributivité)
Quels que soient les nombres k, a et b, on a toujours

$$k(a+b) = ka + kb.$$

Exemple 8

1) $2(x-3) =$ **2)** $x(x+1) =$
3) $2x(3x-2) =$

Propriété 8 (Double distributivité)
Quels que soient les nombres a, b, c et d, on a

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Exemple 9
1. $(2x-5)(3+4x) =$
2. $(4+3z)(2z+1) =$

Propriété 9 (Identités remarquables)
Soient a et b deux nombres réels quelconques. On a alors
1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration. Pour tous réels a et b, on a
— $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
— $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + a(-b) - ba - b \times (-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
— $(a+b)(a-b) = a^2 + a(-b) + ba + b(-b) = a^2 - ab + ab - b^2$

□

Exemple 10
1. $(y+3)^2 =$
2. $(2y-7)^2 =$
3. $(x+5)(x-5) =$