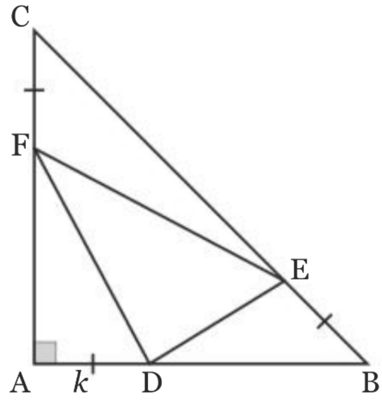
Problème A.

On se place dans un repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Les points D, E et F sont placés sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ tels que

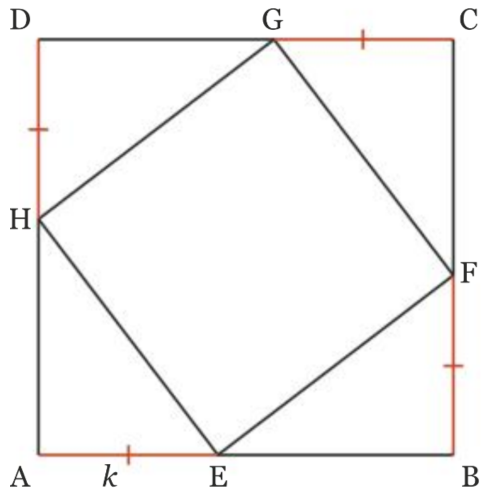
$$AB = BE = CF = k,$$

avec $k \in [0; 1]$.



1. Déterminer en fonction de k les coordonnées des différents points de la figure dans le repère. En particulier montrer que E a pour coordonnées
$$\left(\frac{2-\sqrt{2}k}{2}; \frac{\sqrt{2}k}{2}\right).$$
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.
3. Existe-il une valeur de k telle que le triangle DEF soit rectangle en D ?

Problème B.

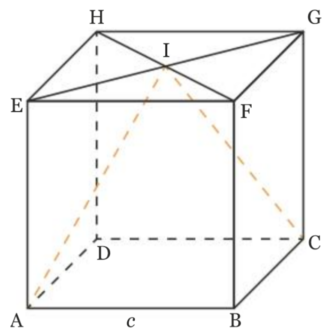


On se place dans un carré $ABCD$. Les points E, F, G et H sont placés sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que

$$AE = BF = CG = DH = k \times AB$$

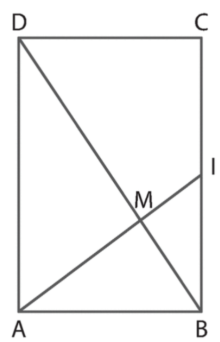
avec $k \in [0; 1]$. Montrer que, quelle que soit la valeur de k, le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

Problème C.



On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur c. Le point I est le centre de la face $EFGH$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AIC}$ au degré près.

Problème D.



Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AD = b$ et de largeur $AB = a$. Le point I est le milieu du côté $[BC]$. On notera M le point d'intersection des droites (AI) et (BD). On cherche à démontrer que les droites (AI) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si $b = a\sqrt{2}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a et de b.
2. Démontrer alors l'équivalence.