Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1. La suite arithmétique (u_n) de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.
2. La suite arithmétique (u_n) de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.
3. La suite arithmétique (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 7$.
4. La suite arithmétique (u_n) définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 4$.

Exercice 2. Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

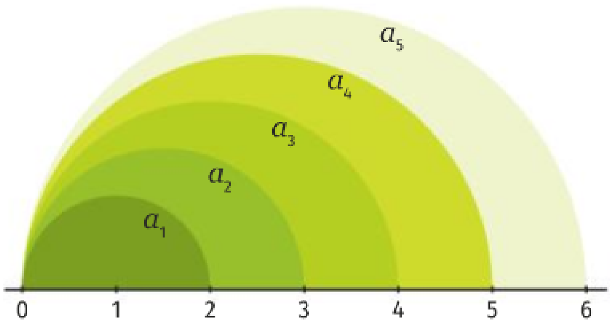
a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$ **b)** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$ **d)** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$

Exercice 3.
On souhaite empiler des allumettes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre d'allumettes nécessaire pour construire la ligne du niveau n. Ainsi $a_1 = 2$ et $a_2 = 4$.

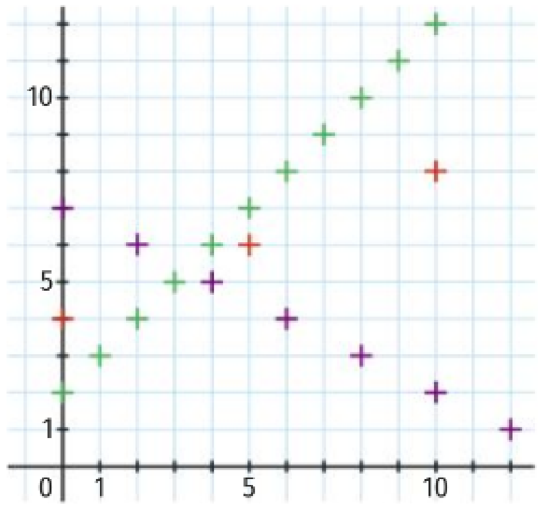
1. Déterminer les quatre premier termes de la suite.
2. Exprimer a_n en fonction de n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) puis en déduire la nature de la suite.
3. Combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la dixième étape ?

Exercice 4.
On construit des demi-disques comme sur la figure ci-dessous. L'unité est le centimètre. On appelle a_n la longueur du demi-cercle correspondant au rang $n \geq 1$.



1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Prouver que la suite (a_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
3. Pourra-t-on obtenir un demi-cercle dont la longueur sera supérieur à 25 cm ? Si oui, à quelle étape ?

Exercice 5.
Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté quelques termes de trois suites arithmétiques. Pour chacune de ces suites, répondre aux questions suivantes.



1. Déterminer le premier terme et la raison.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Donner les valeurs de u_3 et u_6.

Exercice 6. En 2017, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'une artiste était de 9000. On suppose que, chaque année, elle obtient 1500 abonnés supplémentaires. On note f_n le nombre d'abonnés en $2017 + n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2018 et 2019.
2. Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.
3. Quelle est la nature de la suite ? En déduire une expression de f_n en fonction de n.
4. Existe-t-il une année pour laquelle le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à 2017 ? Si oui, laquelle ?

Exercice 7. Fatima décide de s'entraîner pour une épreuve de natation, où elle devra nager sur une distance de 1500 mètres. Pour cela, elle va dans une piscine dont la longueur est de 50 m. Le premier jour, elle fait deux longueurs. Puis chaque jour, elle nage une longueur de plus que le jour précédent. On note p_n la distance réalisée en mètres le n-ième jour.

1. Donner la valeur de u_0.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.
3. Au bout de combien de jours nagera-t-elle 1500 m ?

Exercice 8. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$.

1. (a) Calculer les quatre premiers termes de la suite u.
   (b) La suite u est-elle arithmétique ?
2. On appelle v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Démontrer que la suite v est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$.

1. Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est une suite arithmétique.
2. Donner l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
3. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 50$.

Exercice 10. Soit (α_n) la suite définie par $\alpha_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = 4 - \frac{4}{\alpha_n}$. Soit également (β_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n - 2}$. On admet que la suite (β_n) est bien définie.

1. Montrer que la suite (β_n) est arithmétique.
2. Exprimer β_n, puis α_n, en fonction de n.

Exercice 11. Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1. La suite géométrique (u_n) de raison $q = 3$ et telle que $u_3 = 12$.
2. La suite géométrique (u_n) de raison $q = -2$ et telle que $u_{31} = 32$.
3. La suite géométrique (u_n) définie par $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.
4. La suite géométrique (u_n) définie par $u_1 = 2048$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$.

Exercice 12. Déterminer si les suites suivantes sont géométriques. Si oui, donner le premier terme ainsi que la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$ **b)** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-7)^n$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 2^n$ **d)** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{3^n}$

Exercice 13. Afin de greffer 10 cm^2 de peau à une personne brûlée, on lui prélève 20 mm^2. La culture permet d'augmenter de 15% la surface de peau chaque jour. On se demande dans combien de temps pourra se faire la greffe de peau.

1. Calculer la surface les deuxième et troisième jours.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la surface de peau le jour n. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. Répondre au problème posé.

Exercice 14. Le 1er Janvier 2023, Olivier veut déposer 5 000 euros sur un compte en banque. Il a le choix entre 2 propositions.

1. On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux fixe. Chaque année, le 31 Décembre, la banque lui verse 110 euros sur son compte épargne. On note u_n la somme sur le compte le 1er Janvier de l'année $2023 + n$.
   (a) Déterminer les valeurs de u_0 et u_1.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n. Justifier.
   (c) Combien aurait-il sur son compte en banque en 2040 ?
2. On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux composés. Chaque année, le 31 Décembre, la banque lui verse sur son compte épagne 3% de la somme disponible sur le compte. On note v_n la somme sur le compte le 1er Janvier de l'année $2023 + n$.
   (a) Déterminer les valeurs de v_0 et v_1.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
   (c) Combien aurait-il sur son compte en banque en 2045 ?
3. S'il décide de laisser l'argent sur son compte pendant 5 ans, quelle offre est la plus intéressante ?
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années il est plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés.

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.
3. Soit (v_n) la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 2$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 16. Un parc d'attractions propose à ses visiteurs des pass annuels donannt un accès illimité à l'ensemble du site. En 2023, 5 000 visiteurs achètent ce pass. Chaque année, le directeur du parc prévoit que 90% de ces visiteurs renouvelleront leur pass et que 800 nouveaux visiteurs en achèteront un. On note u_n le nombre de visiteurs ayant le pass annuel en $2023 + n$.

1. Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 800$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8000$.
   (a) Justifier que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
4. Combien peut-on prévoir qu'il y aura de visiteurs détenteurs du pass annuel en 2035 ?

Exercice 17. On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. Le but de l'exercice est d'étudier l'évolution de cette quantité minute par minute. On programme la machine de façon que :

— à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament ;

— toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20% du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. On note w_n la quantité de médicament (en mL) dans le sang après n minutes.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 0{,}8w_n + 1$.
2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = w_n - 5$. Démontrer que z est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. En déduire l'expression de z_n puis de w_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on donner ?

Exercice 18. Aurélia décide de partir de Paris et d'aller à Stockholm en vélo. Elle doit parcourir 2000 km. Le premier jour, elle parcourt 20 km. Chaque jour, elle parcourt 5 km de plus que le jour précédent. On note u_n la distance parcourue le n-ième jour. Ainsi $u_1 = 20$.

1. Quelle distance parcourt-elle le deuxième jour ?
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. On note S_n la distance parcourue au total depuis le début du parcours, le n-ième jour au soir.
   (a) Déterminer S_1 et S_2.
   (b) Exprimer S_n en fonction de n.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours Aurélia aura parcouru les 2000 km et sera arrivé à Stockholm.

Exercice 19. Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$
   Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 20. Kenza veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B. Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 euros par an en 2019.

1. L'assureur A prévoit une augmentation de 10 euros par an. On note u_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur A en $2019 + n$.
   (a) Déterminer les valeurs de u_0 et u_1.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de (u_n) ?
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur A en 2030 ?
   (e) Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?
2. L'assureur B prévoit une augmentation de 2% par an. On note v_n le prix annuel de l'assureur B en $2019 + n$. Répondre aux mêmes questions (a), (b), (c), (d) et (e) que pour l'assureur A, mais cette fois-ci avec la suite (v_n) et l'assureur B.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A.