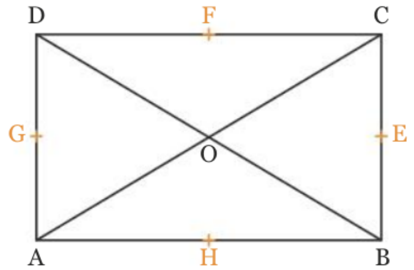
Exercice 1.

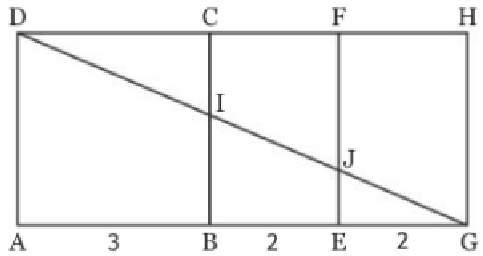
On considère le rectangle $ABCD$ ci-contre, avec E, F, G, et H les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$. Le point O est l'intersection des diagonales du rectangle. Apparier chaque expression du produit scalaire avec son expression simplifiée.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AF}$
3. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$

a. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$
b. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$
c. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD}$
d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

Exercice 2.
Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré $ABCD$ dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques $BEFC$ et $EGHF$ de largeur 2. Calculer les produits scalaires suivants.

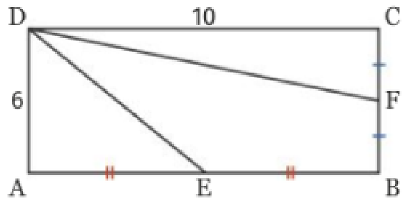


1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$ **3.** $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG}$

4. $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD}$ **5.** $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG}$ **6.** $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

Exercice 3.

On considère le rectangle $ABCD$ de longueur 10 et de largeur 6. Le point E est le milieu de $[AB]$ et F est le milieu de $[BC]$. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ **2.** $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$ **3.** $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$ **4.** $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ **5.** $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DB}$

Exercice 4. On considère les points $A(5;-3)$, $B(-2;7)$, $C(\frac{-1}{2};0)$ et $D(-5;\frac{3}{4})$. Calculer les produits scalaires

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ **2.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ **3.** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

Exercice 5. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan avec $x \in \mathbb{R}$ un réel. Déterminer la valeur de x pour obtenir

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ **2.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$ **3.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{7}{3}$ **4.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{8}$

Exercice 6. On considère les points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = \sqrt{5}$ et $\widehat{BAC} = 120°$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 7. On donne $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6}$. Donner une valeur en degrés de l'angle entre les deux vecteurs.

Exercice 8. Déterminer les éventuelles valeurs du réel x pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\x\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ **2.** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\x\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x-1\\4\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ **4.** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x\\8\end{pmatrix}$

Exercice 9. On considère les points du plan suivants : $A(-10;4)$, $B(-4;1)$ et $C(-1;7)$.

1. En utilisant le produit scalaire, montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 10. (⋆⋆) On considère le point $A(3;0)$ et la maire d d'équation $3x-2y+4=0$. On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite d.

1. On note h l'abscisse du point H. Écrire l'ordonnée de H en fonction de h.
2. Déterminer la valeur de h en utilisant un produit scalaire.
3. Quelles sont les coordonnées de H ?
4. En déduire la distance du point A à la droite d, définie par la longueur AH.

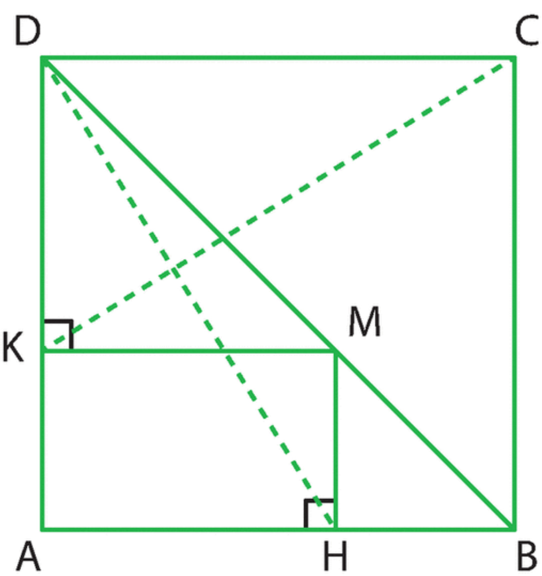
Exercice 11. (⋆⋆) On considère le point $A(4;5)$ et la droite d d'équation $5x+4y+1=0$. On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite d. En appliquanf la même méthode que dans l'exercice précédent, calculer la distance du point A à la droite d.

Exercice 12. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
   (a) Quelle est la valeur de $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$?
   (b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.
2. Supposons maintenant que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
   (a) Pourquoi peut-on affirmer que $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0$?
   (b) Que peut-on alors dire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?
3. Qu'a-t-on prouvé dans cet exercice ?

Exercice 13. (⋆⋆) En utilisant la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire, prouver le résultat connu « les diagonales d'un losange sont perpendiculaires ».

Exercice 14.
On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et un point M quelconque sur le segment $[BD]$. On construit les projetés orthogonaux H et K du point M respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$.



1. On veut démontrer que les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires par deux méthodes.
   (a) On utilisera le repère $(A;B,D)$ et on notera $(x;y)$ les coordonnées du point M.
   (b) On calculera le produit scalaire $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{DH}$ en décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.
2. Démontrer que les longueurs CK et DH sont égales :
   (a) avec des coordonnées ;
   (b) sans coordonnées.