Exercice 1. On considère A et B deux événements. On rappelle que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1. Si $P(A) = 0{,}5$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$, calculer $P(B)$ puis $P(A \cup B)$.
2. Si $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$, que vaut $P(A \cap B)$?

Exercice 2. Quand il commande une pizza à emporter, Jonas a remarqué que le temps d'attente annoncé est 5, 10, 15 ou 20 minutes avec les probabilités $p_5 = 0{,}3$, $p_{10} = 0{,}2$, $p_{15} = 0{,}1$ et p_{20}.

1. Déterminer la probabilité, notée p_{20}, que le temps d'attente soit de 20 minutes.
2. Quelle est la probabilité d'attendre 10 minutes ou moins ?

Exercice 3. Dans son placard, Valérie a des bols et des tasses avec ou sans anse selon la répartition ci-dessous.

	Bol	**Tasse**	**Total**
Avec anse	2	9	11
Sans anse	6	3	9
Total	8	12	20

Le matin, elle prend un de ces récipients au hasard pour prendre son café et on considère les événements

— A : « Le récipient a une anse. »

— B : « Le récipient est un bol. »

1. Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
2. Décrire chacun des événements $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap B$ par une phrase et donner sa probabilité.
3. Écrire l'événement « Le récipient est une tasse sans anse » à l'aise des événements A et B.
4. Associer chacune des phrases suivantes à la valeur qui lui correspond.
   (a) Probabilité qu'une tasse ait une anse — (1) $\frac{9}{20}$
   (b) Probabilité qu'un récipient à anse soit une tasse — (2) $\frac{9}{11}$
   (c) Probabilité qu'un récipient soit une tasse à anse — (3) $\frac{9}{12}$

Exercice 4.

Lors d'une enquête portant sur les 2000 salariés d'une entreprise, on a obtenu les informations suivantes :

	<40 **ans**	≥ 40 **ans**	**Total**
Cadres			
Non cadres			
Total			2000

— 30% des salariés ont 40 ans ou plus ;

— 40% des salariés de plus de 40 ans sont des cadres ;

— 25% des salariés de moins de 40 ans sont des cadres ;

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On considère les événements A : « la personne interrogée a 40 ans ou plus » et B : « la personne interrogée est cadre ».
   (a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des événements A et B.
   (b) Définir par une phrase chacun des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
   (c) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.
3. Sachant que la personne a 40 ans ou plus, quelle est la probabilité que ce ne soit pas un cadre ?

Exercice 5. Soient A et B deux événements tels que $P_A(B) = 0{,}8$, $P_B(A) = 0{,}6$ et $P(A) = 0{,}4$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En déduire $P(B)$.
3. Calculer alors $P(A \cup B)$.

Exercice 6. On lance un dé équilibré à six faces et on considère les événements A : « obtenir $4, 5, 6$ » et B : « obtenir un nombre pair ».

1. Calculer $P_B(A)$.
2. Calculer $P_A(B)$.
3. Calculer $P_{A\cap B}(A \cup B)$.

Exercice 7. Dans une forêt, il y a 30% d'épicéas et 70% de sapins. Un parasite infecte 10% des arbres. Les épicéas représentent 20% des arbres touchés.

1. Quelle est la probabilité qu'un épicéa soit touché par le parasite ?
2. Faire un tableau pour résumer l'ensemble de la situation.

Exercice 8. Vincent et Anne sont haltérophiles. La probabilité pour que Vincent soulève plus de 100 kg est égale à 0,75, alors que la probabilité pour qu'Anne soulève plus de 100 kg est égale à 0,6. La probabilité pour qu'au moins l'un des deux soulève plus de 100 kg est égale à 0,85.

1. Quelle est la probabilité qu'ils soulèvent 100 kg tous les deux ?
2. Anne vient de voir Vincent soulever 100 kg. Quelle est la probabilité qu'elle soulève 100 kg ?

Exercice 9. Une urne opaque contient trois boules rouges, une boule noire et une boule verte, toutes indiscernables au toucher. On procède au tirage, sans remise, de trois boules dont on note la couleur. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes.

Exercice 10. Dans une crèche, chaque matin, Hapsatou fait la sieste avec une probabilité de 0,7. Si elle a fait la sieste le matin, elle fera à nouveau la sieste l'après-midi avec une probabilité de 0,2. Sinon, elle fera la sieste l'après-midi avec une probabilité de 0,9.

1. Représenter la situation avec un arbre de probabilité que l'on complètera entièrement.
2. Calculer la probabilité qu'elle de fasse pas du tout la sieste dans la journée.
3. Calculer la probabilité qu'elle fasse la sieste l'après-midi.

Exercice 11. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

1. Sans faire de calculs (intuitivement), ce test semble-t-il performant ?
2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif.
4. Que penser de ce test ?

Exercice 12. On jette un dé non truqué 20 faces numérotées de 1 à 20. On note

— A : « Le résultat est pair. »
— B : « Le résultat est l'un des nombres $1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19$. »
— C : « Le résultat est impair. »
— D : « Le résultat est l'un des nombres 9 ou 15. »
— E : « Le résultat est un nombre premier. »

1. Les événements E et A forment-ils une partition de l'univers ?
2. Les événements C et $\overline{B}$ forment-ils une partition de l'univers ?
3. Parmi ces cinq événements, en donner deux qui forment une partition de l'univers.
4. Parmi ces cinq événements, en donner trois qui forment une partition de l'univers.

Exercice 13. Lorsqu'elle est exposée au virus de la grippe, une personne peut développer la grippe. Quand elle est vaccinée, la personne exposé ne développe pas la maladie avec une probabilité α. Le nombre α s'appelle l'efficacité du vaccin. De plus, on constate que, parmi les personnes exposées, 20% ne sont ni vaccinnées, ni malades. Cette année, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée est de 0,4.

1. Exprimer, en fonction de α, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinnée et ne soit pas malade.
2. Exprimer, en fonction de α, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée et malade.
3. Pour quelle valeur de α la proportion de personnes exposées qui ne sont pas malades est égale à 50% ?

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}8$, et $P(A \cap B) = 0{,}2$.
2. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}8$, et $P(A \cap B) = 0{,}32$.
3. $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, et $P(A \cup B) = 0{,}65$.
4. $P(A) = 0{,}48$, $P(B) = 0{,}8$, et $P(A \cap B) = 0$.

Exercice 15. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements sont indépendants.

1. A : « tirer un roi » et B : « tirer un rouge »
2. A : « tirer un roi » et B : « ne pas tirer un as »
3. A : « tirer un roi ou tirer une dame rouge » et B : « tirer un rouge »

Exercice 16. Soient A et B deux événements incompatibles ($P(A \cap B) = 0$) de probabilité non nulle. Démontrer que A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 17. On considère deux événements A et B tels que $P(A \cap B) = 0{,}8$ et $P(A \cup B) = 0{,}9$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1{,}7x + 0{,}8 = (x - 0{,}85)^2 + 0{,}0775$.
2. Montrer que A et B ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 18. On considère A un événement indépendant de lui-même. Démontrer que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Exercice 19. On considère que la probabilité de donner naissance à une fille est la même que celle de donner naissance à un garçon. De plus, on admet que le sexe d'un enfant à la naissance est indépendant du sexe des enfants nés avant.
Manuel a deux enfants. Lorsque le facteur est venu sonner à sa porte pour lui apporter un colis, c'est une fille qui a répondu. On ne sait pas si cette fille est l'aînée des deux enfants ou pas. Quelle est la probabilité que l'autre enfant de Manuel soit un garçon : $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$? Justifier.

Exercice 20 (paradoxe de Monty-Hall). Lors d'un jeu télévisé, une candidate est placée devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elle se trouve une voiture, tandis que derrière chacune des deux autres portes il n'y a rien. Le jeu se déroule en trois étapes :

(a) La candidate choisit d'abord une première porte.

(b) Le présentateur va alors ouvrir une autre porte, différente de celle choisie par la candidate, derrière laquelle il n'y a rien.

(c) Le présentateur propose à la candidate de modifier son choix, et ouvre la porte finalement choisie par la candidate, qui gagne la voiture si elle est derrière la porte choisie.

1. Intuitivement, quelle est la probabilité que la voiture soit derrière la porte choisie par la candidate au début du jeu ? À l'issue de l'étape (b) ? Vérifier par le calcul (un arbre peut être utile !).
2. La candidate a-t-elle intérêt à modifier son choix lorsque le présentateur lui propose de le faire ?