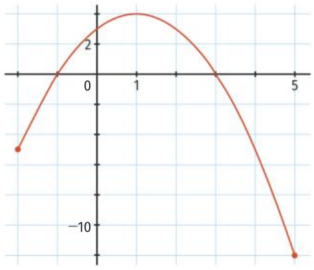
Exercice 1.

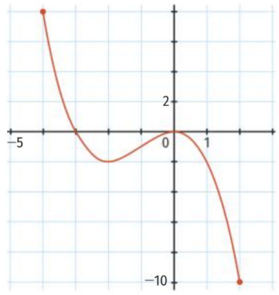
La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I = [-2; 5]$.



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur I.
2. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

Exercice 2.

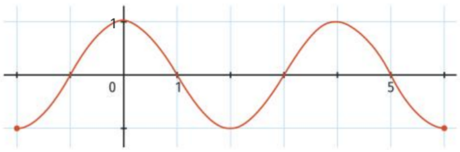
La courbe ci-contre représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $I = [-4; 2]$.



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de g sur I.
2. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle I.

Exercice 3.

La courbe ci-contre représente une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $I = [-2; 6]$.



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de h sur I.
2. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle I.

Exercice 4. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $I = [2; 8]$. Le tableau ci-dessous donne le signe de $f'(x)$ sur I.

x	2		3		5		8
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

1. Donner le tableau de variations de f sur I.
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.

Exercice 5. Soit g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$. Le tableau ci-dessous donne le signe de $g'(x)$ sur I.

x	0		3		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1. Donner le tableau de variations de g sur I, sachant que $g(3) = -1$ et $g(6) = 2$.
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction g.

Exercice 6. ($\star$) On pose $f : x \mapsto \sqrt{2x+10} \times (1-x)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $I = [-5; +\infty[$, et que l'ensemble de dérivabilité de f est $J =]-5; +\infty[$.
2. Pour $x \in J$, on pose $u(x) = \sqrt{2x+10}$. Calculer, pour $x \in J$, l'expression de la dérivée de u.
3. Calculer maintenant, pour tout $x \in J$, l'expression de la dérivée de f.
4. Dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.
5. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f et vérifier vos résultats.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition et de dérivabilité de f, que l'on notera D.
2. Calculer, pour $x \in D$, $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur D.

Exercice 8.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a $x^3 + 3x^2 - 54 = (x-3)(x^2+6x+18)$.
2. En déduire le signe du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 54$.
3. Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $]0;5]$. Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression

$$f(q) = \frac{q^3 + 6q^2 + 12q + 108}{12q}.$$

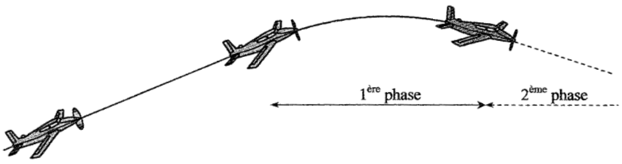
   (a) Quel est le prix de revient d'une pièce lorsque l'entreprise produit 4200 pièces par jour ?

   (b) Démontrer que pour $q \in]0;5]$, $f'(q) = \frac{P(q)}{6q^2}$ où P est le polynôme de la question 2.

   (c) Dresser le tableau de variations de f.

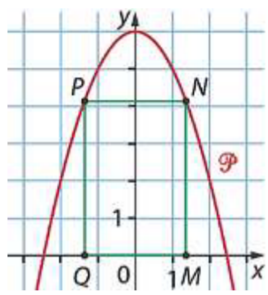
   (d) En déduire le nombre q_0 d'unités à fabriquer pour que le prix de revient d'une pièce soit minimal. Quel est alors le montant en euros du coût total de production ?

Exercice 9. Au cours d'une montée, le moteur d'un avion s'arrête brusquement alors que son altitude est de 2000 mètres. L'avion suit d'abord une trajectoire parabolique durant 8 secondes puis le pilote amorce une descente en vol plané. On se propose d'étudier la première phase de ce vol sans moteur.



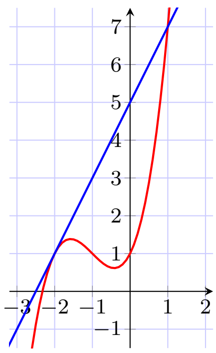
Dans la phase où la trajectoire est parabolique, on peut définir l'altitude h en mètres de l'avion en fonction du temps t en secondes par l'expression $h(t) = -0{,}75t^2 + 7{,}5t + 2000$ avec $t \in [0;8]$.
Quelle est la hauteur maximale de l'avion et son altitude à la fin de la phase parabolique ? Justifier.

Exercice 10. On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 6 - x^2$.



1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.
2. Soit un point M de coordonnées $(x;0)$, où $x \in [0;\sqrt{6}]$. On construit le rectangle $MNPQ$ comme ci-contre où N et P sont sur la parabole $\mathscr{P}$, et où M et Q sont sur l'axe des abscisses. Donner les coordonnées de M, N, P et Q.
3. En déduire la mesure des longueurs MN et MQ.
4. Déterminer la valeur de x avec une précision à 10^{-2} près, pour que l'aire de $MNPQ$ soit maximale.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.



1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les variations de f, puis dresser son tableau de variations.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -2.
4. Le point $S(-4;-3)$ appartient-il à T ?
5. Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x) - (2x+5) = (x+2)^2(x-1)$.
6. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T sur l'intervalle $[-4;2]$.

Exercice 12. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa dérivée. On donne le tableau de signes de f'. La fonction f admet-elle un extremum local ? Si oui, est-ce un maximum ou un minimum ?

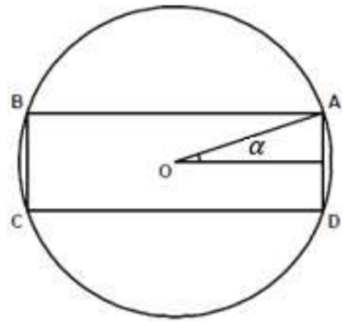
x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 13. Soit g une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et g' sa dérivée. On donne le tableau de signes de g'. La fonction g admet-elle un extremum local ? Si oui, est-ce un maximum ou un minimum ?

x	0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

Exercice 14. Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où $\ell = AB$ et $h = BC$ sur la figure ci- contre. On prend comme unité de longueur, le rayon du tronc d'arbre (ce rayon vaut donc 1).

1. Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$.
2. En déduire que $\ell \times h^2 = -\ell^3 + 4\ell$.
3. On considère la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 4x$ pour $x \geq 0$.
   (a) Étudier le sens de variations de f.
   (b) Comment choisir ℓ et h pour que la résistance de la poutre soit maximale ?
   (c) Quel est l'angle α correspondant, 0,1 radian près ?



Exercice 15. Un industriel doit fabriquer des boîte fermée de volume 1 L, soit 1 dm^3, ayant la forme d'un pavé de hauteur h dont la base est un carré de côté x. L'unité de longueur est le dm.

1. En vous aidant d'un schéma ou d'un patron de la boîte, justifier que $h = \frac{1}{x^2}$.
2. En déduire que l'aire totale des faces du pavé est $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.
3. Montrer que pour $x > 0$, on a
$$S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x}$$
4. En déduire les variations de S, puis déduire et donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.

Exercice 16. Partie A. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{x^2-ax+b}{x+3}$ où a et b sont des réels à déterminer. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f, dans un repère orthonormé. On sait que

— la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A\left(0; \frac{4}{3}\right)$.
— la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et x.
2. À partir des données de l'énoncé, déterminer les valeurs de a et de b.

Partie B. On considère maintenant la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{x^2-x+4}{x+3}$.

3. Calculer $f'(x)$.
4. Justifier que le signe de $f'(x)$ est donné par le signe du trinôme $x^2 + 6x - 7$.
5. En déduire le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
7. (a) Calculer l'expression de $f(x) - (-15x + 40)$ et montrer que $f(x) \geq -15x + 40$, pour $x \neq 3$.
   (b) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de (T).