# Chapitre 6 : Suites

## 1 Définition et mode de génération

Intuitivement, une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres réels :

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

**Définition 1** (Suite numérique)

Une **suite numérique** $u$, également notée $(u_n)$, est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

**Notation 2**

Le terme $u(n)$ est le plus souvent noté $u_n$.
La suite $u$ est parfois aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Remarque**

Parfois le premier terme de la suite $u$ n'est pas $u_0$ mais $u_1$ ou un indice encore supérieur.

**Remarque**

**Attention !** Il ne faut pas confondre le terme $u_n$ et la suite $(u_n)$.

**Exemple 1**

Soit $(u_n)$ la suite définie arbitrairement sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 2 \ ; \ u_1 = 3 \ ; \ u_2 = 741 \ ; \ u_4 = -12$$

**Définition 3** (Définition explicite d'une suite)

Une suite est définie **explicitement** lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de $n$. On donne alors l'expression du **terme général** $u_n$ en fonction de $n$.

**Exemple 2**

La suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n + 1$ est définie expicitement. On a

$$v_4 = 2 \times 4 + 1 = 9 \qquad v_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21 \qquad v_{58} = 2 \times 58 + 1 = 117$$

**Application 3**

Soit $(w_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 10n - 5$. Calculer les termes $w_3$, $w_{10}$, $w_{42}$, et $w_{101}$.

**Définition 4** (Définition par récurrence)

Une suite $(u_n)$ est définie **par récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

**Exemple 4**

La suite $(a_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par le premier terme $a_0 = 4$ et, pour tout entier $n$, par $a_{n+1} = 2a_n + 1$ est définie par récurrence. Pour trouver $a_4 = 79$, il faut calculer $a_3$, qui nécessite de calculer $a_2$, qui nécessite à son tour de calculer $a_1$, que l'on calcule grâce à

$$a_1 = 2a_0 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9.$$

Puis on trouve

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \times 19 + 1 = 39 \\ a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \times 39 + 1 = 79. \end{aligned}$$

**Application 5**

Calculer les trois premiers termes de la suite $(b_n)$ définie par $b_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $b_{n+1} = 2b_n - 5n$.

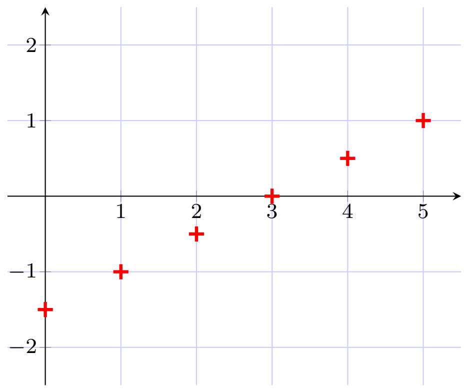
## 2 Représentation graphique d'une suite

**Définition 5** (Représentation graphique d'une suite)

Dans un repère du plan, une **représentation des termes** de la suite $(u_n)$ est l'ensemble des points $M_n$ de coordonnées $(n, u_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On obtient ce que l'on appelle un **nuage de points**.

**Exemple 6**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{2} - 1.5$. On représente le nuage de points $(n, u_n)$ sur la figure ci-contre.
Les points dans le repère ont donc les coordonnées suivantes : $(0; -1.5)$, $(1; -1)$, $(2; -0.5)$, $(3; 0)$, $(4; 0.5)$, et $(5; 1)$.




**Application 7**

Dans un repère, représenter les trois premiers termes de de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 2 - 1{,}5n.$$

## 3 Sens de variation

**Définition 6** (Suite croissante)
Une suite $(u_n)$ est **croissante** à partir du rang $n_0$ lorsque, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

**Définition 7** (Suite décroissante)
Une suite $(u_n)$ est **décroissante** à partir du rang $n_0$ lorsque, pour tout entier $n \leq n_0$, on a

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

**Définition 8** (Suite monotone)
Une suite est dite **monotone** à partir du rang $n_0$ lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang $n_0$.

**Exemple 8**
Soit $z$ la suite définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n - 2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= -2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $z$ est décroissante à partir de $n = 0$.

**Application 9**
Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n > 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
*Indication : on pourra étudier la différence ou le quotient de $u_{n+1}$ et $u_n$.*

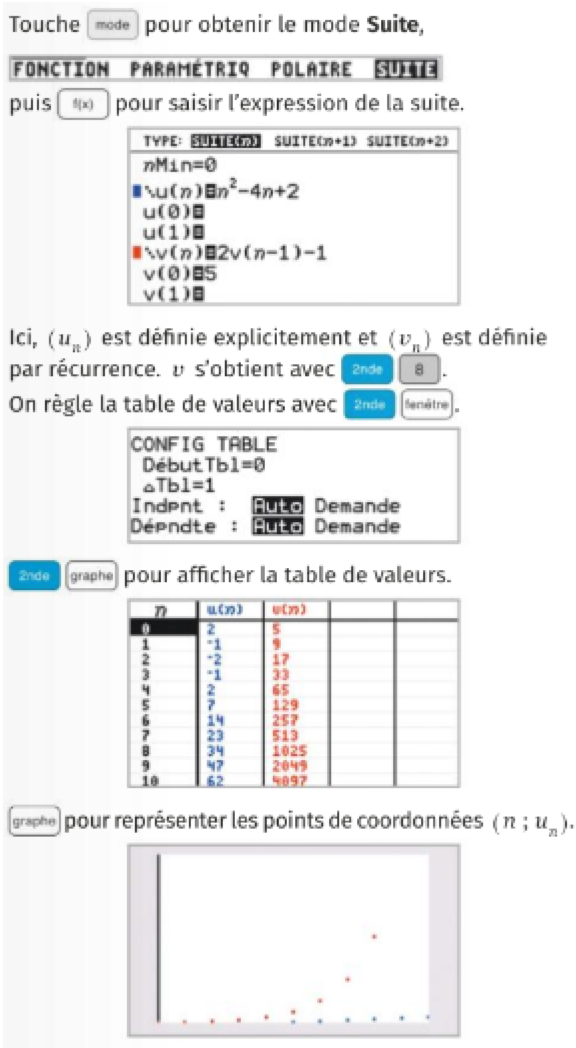
**Application 10**
Étudier le sens de variation des suites suivantes.
1. La suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3n + 1$.
2. La suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n-4}{n+5}$.
3. La suite $w$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = -2 \times 7^n$.

**Remarque**
**Attention !** Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. Parfois, une suite ne sera ni l'un ni l'autre.

**Méthode**
Pour trouver le sens de variation d'une suite $(u_n)$ on peut
- Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et regarder son signe
  - Si c'est positif, la suite est croissante.
  - Si c'est négatif, la suite est décroissante.
- Calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
  - Si le quotient est supérieur à 1, la suite est croissante.
  - Si le quotient est inférieur à 1, la suite est décroissante.

## 4 Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est très utile pour représenter graphiquement une suite ou obtenir les premiers termes de la suite. Un mode d'emploi est donné dans l'image ci-contre.




**Application 11**

Soit $(u_n)$, $(v_n)$, et $(w_n)$ trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = n^3 - n^2 + 1$$

$$v_0 = 10 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1$$

$$w_0 = 1 \text{ et } w_{n+1} = w_n + n$$

Compléter le tableau de valeurs suivant à l'aide de la calculatrice.

| **n** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{u_n}$ | | | | | | |
| $\mathbf{v_n}$ | | | | | | |
| $\mathbf{w_n}$ | | | | | | |

## 5 Limites de suites

**Application 12**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 3 - \frac{5}{n+1}.$$

| **n** | 0 | 1 | 2 | 5 | 10 | 25 | 50 | 100 | 200 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{u_n}$ | | | | | | | | | | |

1. À l'aide de la calculatrice, remplir le tableau de valeur ci-dessus.
2. Vers quelle valeur semble se rapprocher cette suite lorsque $n$ est très grand ?

**Notation 9**

Lorsque les termes $u_n$ d'une suite se rapprochent d'un réel $\ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$, on dit que $u$ converge vers $\ell$ et on note

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

**Définition 10** (Limite)
Lorsqu'on a $u$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel tel que

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \ell,$$

on dit que $\ell$ est la **limite** de la suite $u$.

**Application 13**
On considère les cinq suites suivantes :

$$u_n = n^2 \qquad v_n = \frac{1}{n} \qquad w_n = (-1)^n \qquad t_n = -2^n \qquad s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1. Compléter le tableau ci-dessous.

| **n** | $u_n$ | $v_n$ | $w_n$ | $t_n$ | $s_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 25 | | | | | |
| 50 | | | | | |
| 100 | | | | | |

2. Quel semble être le comportement à l'infini des suites $u$, $v$, $w$, $t$, et $s$ ?

**Notation 11**
Lorsque $u_n$ devient de plus en plus grand quand $n$ tend vers $+\infty$, on dit que $u$ diverge vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

**Notation 12**
Lorsque $u_n$ est négatif et devient de plus en plus grand en valeur absolue quand $n$ tend vers $+\infty$, on dit que $u$ diverge vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$$

**Définition 13** (Absence de limite)
Lorsque les valeurs de $u_n$ ne se stabilisent autour d'aucune valeur réelle, on dit que $u$ diverge et n'admet pas de limite.