Chapitre 1 : second degré

1 Fonctions polynômes du second degré

1.1 Forme développée et forme canonique

Définition 1 (Fonction polynôme du second degré)
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction polynôme du second degré** s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels avec $a \neq 0$ et tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Définition 2 (Forme développée et coefficients)
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a,b,$c \in \mathbb{R}$ sont des réels et où $a \neq 0$. Lorsque la fonction f est écrite sous cette forme, on parle de **forme développée**. Les réels a, b, et c sont appelés les **coefficients** de f.

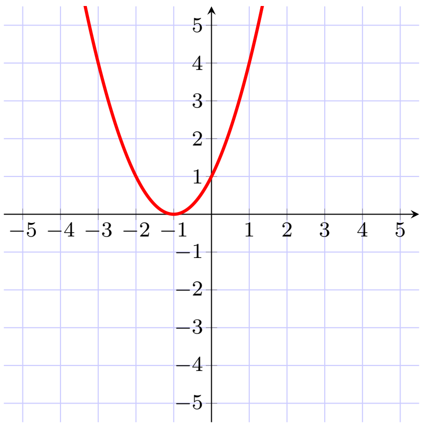
Exemple 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré, donnée sous forme développée. Ses coefficients a, b, et c valent

$a =$ $b =$ $c =$

Le graphe de la fonction f est donné ci-dessous.



Exemple 2
Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes du second degré ? Si oui, donner leurs coefficients a, b, c dans l'expression $ax^2 + bx + c$.

1. La fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = -x^2 - x + 10$.

2. La fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_2(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$.
3. La fonction f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = x^2$.
4. La fonction f_4 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = x + 2$.
5. La fonction f_5 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_5(x) = x(x+1)$.
6. La fonction f_6 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_6(x) = 0$.

Propriété 1

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

et on a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette forme s'appelle la **forme canonique** de f.

Démonstration. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ trois réels et $a \neq 0$. Comme on a $a \neq 0$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Puis on remarque que les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ forment le début du développement de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 =$$

On peut donc écrire que

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) =$$

puis que

$$f(x) = a\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right).$$

En mettant sur le même dénominateur, on remarque que

$$-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$$

$$= \qquad\qquad .$$

On retrouve alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a \times \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ &= a\,(x-\alpha)^2 + \beta, \end{aligned}$$

où $\alpha = \dfrac{-\,b}{2a}$ et où $\beta = \dfrac{-\,b^2 + 4ac}{4a}$. De plus, on a aussi

$$f(\alpha) = a\,(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0 + \beta = \beta.$$

□

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$
La forme canonique de f est
$$f(x) = (x+1)^2.$$
En effet, on a dans ce cas

$a =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

1.2 Variations et représentation graphique

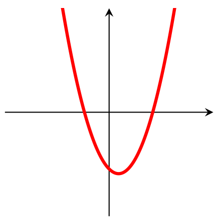
Propriété 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Si a > 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

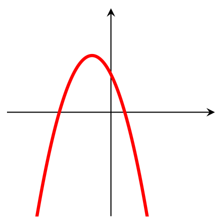
La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, et f admet comme minimum β en α.



Si a < 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$, et f admet comme maximum β en α.



Définition 3 (Parabole)

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée une **parabole**.

Exemple 4

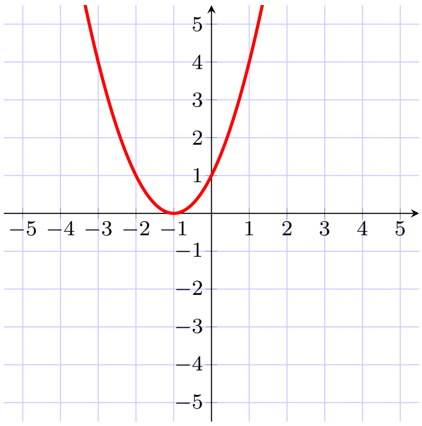
Reprennons l'exemple de la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$
On a

$a = 1$ $\qquad\qquad$ $b = 2$ $\qquad\qquad$ $c = 1.$

On peut donc calculer
$$\alpha =$$
puis on retrouve β :
$$\beta =$$
On retombe bien sur la forme canonique
$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta =$$

— La fonction est strictement décroissante sur

— La fonction est strictement croissante sur
— Elle admet comme minimum ... en ....



Propriété 3
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha) + \beta.$$

Alors f est représentée par une parabole dont le sommet a pour coordonnées (α, β).

Exemple 5
La fonction définie par $f(x) = (x+1)^2$ de l'exemple précédent admet une parabole dont le sommet est le point $(-1, 0)$.

2 Équations du second degré

2.1 Définitions

Définition 4 (Équation du second degré)
Une **équation du second degré** à coefficients réels est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

avec a,b,$c \in \mathbb{R}$ trois réels et $a \neq 0$.

Définition 5 (Racines d'une équation)
Les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du trinôme ax^2+bx+c. De la même manière, on parle de racine pour le polynôme défini par $f(x) = ax^2+bx+c$

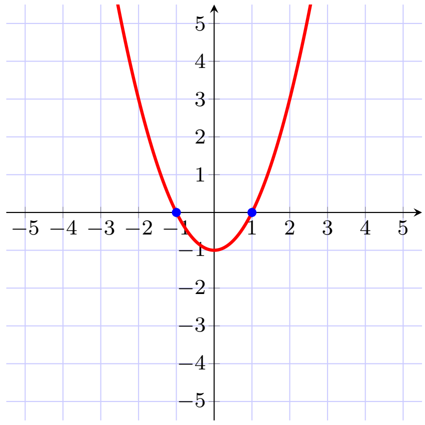
Exemple 6
L'équation $2x^2 - x + 3 = 0$ est une équation du second degré avec

$a =$ $b =$ $c =$

Exemple 7
L'équation $x^2 - 2 = 0$ est une équation du second degré avec $a = 1, b = 0, c = -2$. Cette équation admet deux racines :

Remarque

Les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ correspondent aux abcisses des points où la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par l'axe des abcisses. Ci-dessous l'exemple de $x^2 - 1 = 0$.



Définition 6 (Racine d'une fonction polynôme)

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On dit que la valeur x_0 est une **racine** de f si

$$f(x_0) = 0.$$

2.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{R}$

On va maintenant apprendre à résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré, c'est-à-dire à trouver des solutions réelles à nos équations.

Définition 7 (Discriminant)

Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, noté Δ (delta majuscule), est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Propriété 4

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

On dit que x_0 est **racine double** du trinôme.

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On a vu au cours de la démonstration concernant la forme canonique que l'on pouvait écrire

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

En raisonnant **par équivalence**, on a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

On peut alors différencier plusieurs cas.

Premier cas : $\Delta < 0$. Dans ce cas on a $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. Mais on a aussi $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif ou nul. L'équation n'a donc pas de solution.

Deuxième cas : $\Delta = 0$. Dans ce cas l'équation devient

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \\ &\iff x = \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

L'équation a donc une unique solution, donnée par $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Troisième cas : $\Delta > 0$. Cette fois-ci on a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Et on obtient finalement deux solutions distinctes, données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

□

Exemple 8

Considérons l'équation du second degré

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

On a ici $a = 1, b = 2, c = -3$. On commence par calculer le discriminant de cette équation, on obtient

$$\Delta =$$

On est dans le cas où $\Delta > 0$ et on sait qu'on a ainsi deux solutions distinctes :

$$x_1 =$$

et

$$x_2 =$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathscr{S} =$

3 Propriétés d'un trinôme $ax^2 + bx + c$

3.1 Factorisation

Propriété 5 (admise)
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de f.
- Si $\Delta < 0$, alors la fonction f ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes de degré 1.

Exemple 9
On a vu précédemment que la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

avait pour discriminant $\Delta = 16$ et pour racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Cela signifie que l'on peut aussi écrire f sous la forme factorisée

$$f(x) =$$

3.2 Somme et produit de racines

Propriété 6 (admise)
Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

dont le discriminant est strictement positif. La fonction f a alors deux racines distinctes x_1 et x_2 et on a

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

3.3 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 7 (admise)
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

de déterminant Δ.

— Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de a.
— Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel $x \neq \frac{-b}{2a}$, $f(x)$ est du signe de a, et $f(\frac{-b}{2a}) = 0$.
— Si $\Delta > 0$, alors on a les tableaux de signe suivants.

Si a > 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si a < 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut retenir que dans ce cas, f est du signe de a, sauf entre ses racines.

Exemple 10

On peut reprendre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

On a vu que le déterminant de f vaut 16 et que les deux racines de f sont données par $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. On a ainsi le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et, en effet, cela concorde avec la représentation graphique de f donnée ci-dessous.