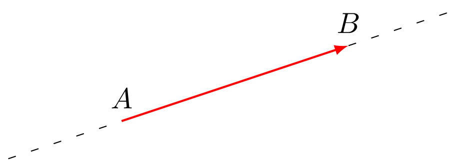
Chapitre 7 : Produit scalaire

1 Rappels sur les vecteurs

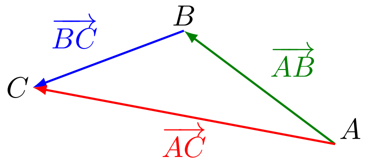
Définition 1 (Caractéristiques d'un vecteur)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par
- **sa direction** : celle de la droite (AB) ;
- **son sens** : de A vers B ;
- **sa norme** : la longueur du segment $[AB]$.



Propriété 1 (Relation de Chasles)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Propriété 2

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Propriété 3

Soient $\overrightarrow{r}(x; y)$ et $\overrightarrow{s}(x'; y')$ deux vecteurs d'un repère du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s}$ sont alors $(x + x'; y + y')$.

Remarque

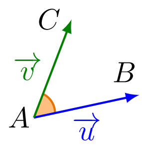
Il y a évidemment beaucoup d'autres choses à savoir sur les vecteurs !

2 Expressions du produit scalaire

2.1 Formule trigonométrique

Définition 2 (Angle de deux vecteurs)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.



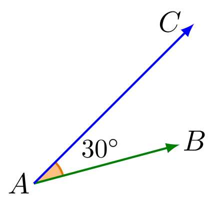
Définition 3 (Produit scalaire)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, défini par

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

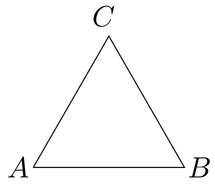
Application 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que $||\overrightarrow{AB}|| = 2$ et $||\overrightarrow{AC}|| = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Application 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

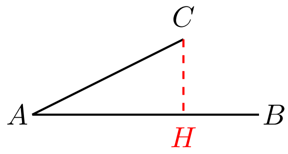


2.2 Formule du projeté orthogonal

Propriété 4

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). On a alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}.$$



Remarque

Si H est sur la demie-droite $[AB)$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$. Sinon $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$

Application 3

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB=3$ et $AC=4$. On note E le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[CD]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. Calculer $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}$

2.3 Dans un repère orthonormé

Théorème 5

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

On a alors

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'.$$

Application 4

Soient $A(-2;5)$, $B(3;-1)$ et $C(4;2)$ trois points du plan. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Méthode

Quand on veut **calculer un produit scalaire**, il faut réfléchir à la méthode la plus adaptée :

— si on peut calculer facilement l'angle mis en jeu, on utilise la première formule.

— Si on peut calculer facilement le projeté orthogonal, on utilise la deuxième formule.

— Si on connaît (ou si on peut calculer facilement) les coordonnées des vecteurs mis en jeu, on utilise la troisième formule.

Application 5

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans le triangle ABC.

1. $AB=5$, $AC=4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$.

2. $AB = 5$ et $AH = 4$, où H est le pied de la hauteur issue de C. De plus $H \in [AB]$.
3. $A(-1;-1)$, $B(4;-1)$, $C(3;3)$ dans un repère orthonormé.

3 Propriétés du produit scalaire

3.1 Bilinéarité et symétrie

Propriété 6 (Symétrie)

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$, alors on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$.

Propriété 7 (Bilinéarité)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $k \in \mathbb{R}$ un réel. On alors

- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{w}) = (k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{w} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})$

3.2 Orthogonalité

Définition 4 (Orthogonalité)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Notation 5

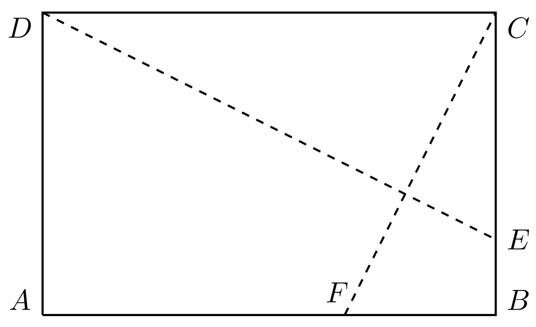
On note souvent $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Propriété 8

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Application 6

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \frac{3}{2}BC$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire des droites (DE) et (CF) ?



Application 7

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points $A(-3;0)$, $B(0;-2)$ et $C(4;4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, au centième de degré près.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et préciser en quel sommet.