Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles

Notation 1

— On note Ω l'univers, c'est-à-dire l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire.

— Un événement correspond à une partie des issues possibles de l'expérience, c'est un sous-ensemble de Ω.

— On note $P(A)$ la probabilité que l'événement A se réalise.

— On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

— On note $A \cup B$ l'événement qui se réalise si l'événement A **ou** l'événement B se réalise, c'est-à-dire si au moins l'un des deux se réalise.

— On note $A \cap B$ l'événement qui se réalise si l'événement A **et** l'événement B se réalise, c'est-à-dire si les deux événements se réalisent simultanément.

1 Probabilités conditionnelles

Dans tout le chapitre, sauf indication du contraire, A et B sont deux événements d'un univers Ω, tels que

$$P(A) \neq 0.$$

Définition 2 (Probabilité conditionnelle)

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note

$$P_A(B)$$

et est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 1

Un sac contient quatre boules noires numérotées de 1 à 4 et notées N_1, N_2, N_3, N_4 ainsi que six boules blanches numérotées de 1 à 6 et notées $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. On extrait au hasard une boule dans le sac. On a

$$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, N_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}.$$

On note

— A l'événement « la boule tirée porte un numéro 3 » ;

— B l'événement « la boule est blanche ».

On a $A = \{N_3, B_3\}$, $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$, et $A \cap B = \{B_3\}$. On a ainsi $P(A) = \frac{2}{10} \neq 0$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. La probabilité d'extraire une boule blanche **sachant qu'**elle porte le numéro 3 est égale à

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{10}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Application 2

On jette un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre obtenu. Quelle est la probabilité que le nombre obtenu soit un nombre premier sachant que le nombre obtenu est supérieur à 4 ?

Propriété 1

La probabilité $P_A(B)$ vérifie

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \text{ et } P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1.$$

Propriété 2

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Exemple 3

Si $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$, et $P_A(B) = \frac{4}{7}$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times \frac{4}{7} = 0{,}4$$

puis

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}.$$

Remarque

La propriété 2 permet de passer de $P_A(B)$ à $P_B(A)$ (et inversement). On voit dans l'exemple 3 que ce n'est pas la même chose !

Application 4

Dans une classe de première, 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

1.1 Utilisation de tableaux

Notation 3

Les **tableaux à double entrée** permettent une présentation claires de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{\mathbf{A}}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

— $P(A\cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.

— $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).

— $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \text{ et } P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Exemple 5

Si $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A\cap B) = 0{,}4$, on a alors le tableau suivant.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	0,4	0,3	0,7
$\overline{\mathbf{A}}$	0,2	0,1	0,3
Total	0,6	0,4	1

Et on trouve donc

— $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}1$;

— $P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$;

— $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$;

Application 6

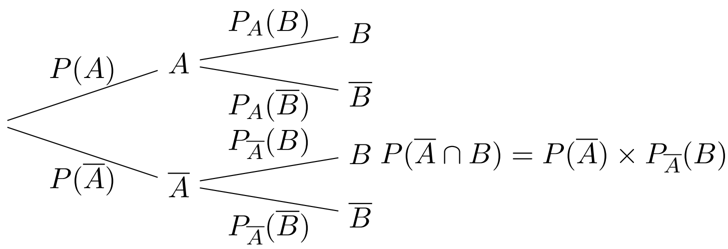
Un club sportif rassemble 180 membres répartis en deux catégories : juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.
En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

2 Formule des probabilités totales

2.1 Arbre pondéré

Définition 4 (Arbre pondéré)

Un **arbre pondéré**, ou **arbre de probabilité**, est un schéma mettant en jeu des probabilités conditionnelles et permettant de calculer rapidement des probabilités.



Propriété 3 (admise)

1. La somme des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
2. La probabilité de l'événement à l'extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

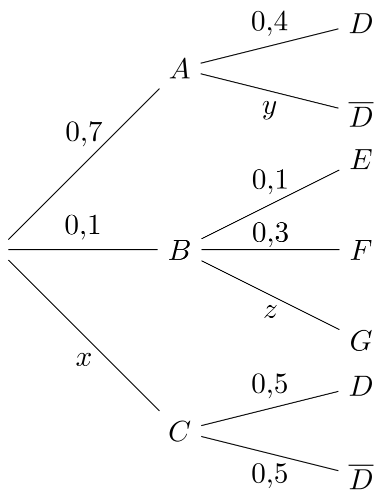
Exemple 7

On considère l'arbre pondéré ci-contre.

— La première propriété nous dit que $0{,}7 + 0{,}1 + x = 1$, d'où $x = 0{,}2$. De même $y = 0{,}6$ et $z = 0{,}6$.

— La deuxième propriété nous dit que $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$.

— La troisième propriété nous dit que $P(D) = P(A \cap D) + P(C \cap D) = 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}38$.



Application 8

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.

1. Construire un arbre pondéré complet représentant cette expérience.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

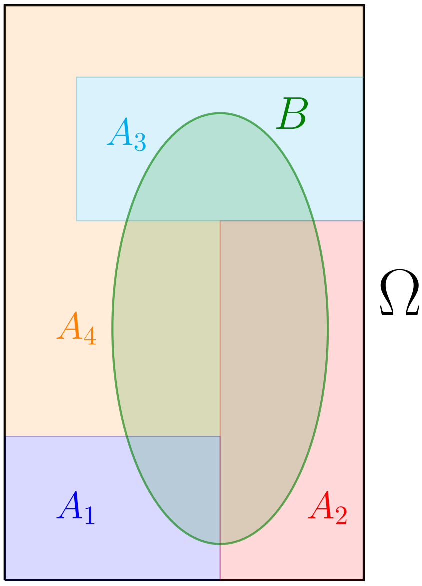
2.2 Probabilités totales

Définition 5 (Partition de l'univers)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des événements non vides de Ω. Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forment une **partition de l'univers** Ω si et seulement si

— ils sont deux à deux **incompatibles** : pour tous entiers distincts i et j entre 1 et k, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$;

— leur réunion forme tout l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$.



Propriété 4 (Formule des probabilités totales)

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et un événement B. On note $A_1, \ldots, A_k$ k événements formant une partition de l'univers. Alors on a

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B)$$

Remarque

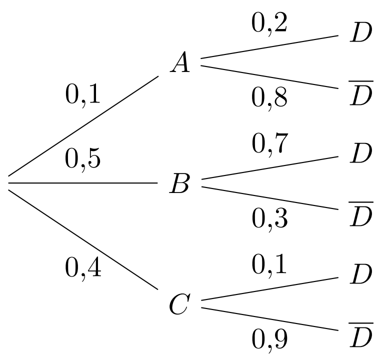
Un événement A et son complémentaire $\overline{A}$ forment toujours une partition de l'univers. On a donc

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B).$$

Exemple 9

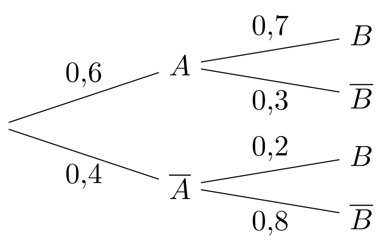
On considère l'arbre pondéré ci-contre. Les événements A, B et C forment une partition de l'univers Ω, ainsi

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}41 \end{aligned}$$



Application 10

On considère les événements A et B vérifiant l'arbre pondéré ci-contre.
Déterminer $P(B)$.



3 Indépendance

Définition 6 (Indépendance)

Soient A et B deux événements d'un univers Ω. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriété 5

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, tels que $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration. C'est un résultat d'équivalence ("si et seulement si"). Commençons par le sens direct : si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = P(B)$. Cela vient de la définition de $P_A(B)$. En effet $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Mais dans le cas de deux événements indépendants on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc

$$P_A(B) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

L'autre sens (si $P_A(B) = P(B)$ alors A et B sont indépendants) vient aussi de la définition. On a $P_A(B) = P(B)$ donc $\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$, d'où finalement $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, et donc les événements A et B sont indépendants. □

Remarque

L'intuition derrière la notion d'indépendance est que si deux événements sont indépendants, la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Exemple 11

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(B) = 0{,}35$. Danc ce cas, on a

$$P(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}35 = 0{,}28.$$

Propriété 6 (admise)

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi deux événements indépendants.

Application 12

On dispose d'une urne qui contient trois boules rouges numérotées $1, 2, 3$ ainsi que six boules noires numérotées $1, 1, 1, 2, 2$ et 3. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans cette urne et on s'intéresse aux événements suivants :

— R : « Tirer une boule rouge. »

— P : « Tirer une boule dont le numéro est pair. »

— U : « Tirer une boule dont le numéro est 1. »

1. Montrer que les événements P et R sont indépendants.
2. Les événements R et U sont-ils indépendants ? Justifier.