Chapitre 10 : Fonction exponentielle

1 Définition et première propriétés

1.1 Définition

Théorème 1 (admis)

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée exp.

Remarque

La fonction exponentielle est donc définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\exp(0) = 1$. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp'(x) = \exp(x)$.

1.2 Propriétés algébriques

Propriété 2

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(x) \neq 0.$$

Propriété 3

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ deux réels et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif, on a alors

a. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

b. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

c. $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

d. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

1.3 Notation e^x

Notation 1

Le nombre $\exp(1)$ est noté e. On a $e \approx 2{,}718$.

Propriété 4 (admise)

D'après les propriétés précédentes, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n.$$

Par extension, on admet que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = e^x.$$

Propriété 5

On retrouve les propriétés algébriques précédentes :

a. $e^{x+y} = e^x \times e^y$ **b.** $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ **c.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **d.** $e^{nx} = (e^x)^n$

Application 1

Simplifier au maximum chacune des expressions suivantes, où $x \in \mathbb{R}$.

a) $A = \dfrac{e^2 \times e^{-3}}{e^{-7}}$ **b)** $B = e^x\left(1 + 2e^{-x}\right)$ **c)** $C = \dfrac{e^{5x-2}}{e^{1-x}}$ **d)** $D = \dfrac{e^{2x+1}}{\left(e^{x-1}\right)^4}$

Application 2

Démontrer chacune des deux égalités suivantes.

a) $\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \dfrac{4}{1+3e^{-2x}}$ **b)** $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 = 4$

Propriété 6

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Démonstration. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$, puis

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0,$$

donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$. □

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Variations et représentation graphique

Propriété 7

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Démonstration. Cela fait partie de la définition de la fonction exponentielle. □

Propriété 8

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp(x)$				$+$			
$\exp$		↗	1	↗	e	↗	

Démonstration. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$, donc la fonction exp est strictement croissante, d'après les propriétés sur la dérivation. □

Propriété 9

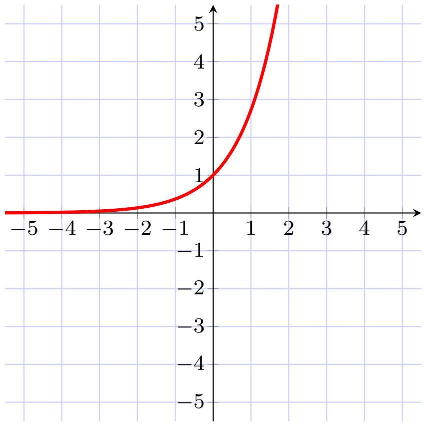
La courbe représentative de la fonction exponentielle est donnée ci-contre. On retrouve bien

— qu'elle est strictement positive ;

— strictement croissante ;

— $\exp(0) = 1$;

— $\exp(1) = e \approx 2{,}718$.



2.2 Équations et inéquations

Propriété 10

Pour tout nombres réels $a,b \in \mathbb{R}$, on a :

— $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

— $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

— $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Application 3

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $e^x = e^7$ **2.** $e^x < e^2$ **3.** $e^x \geq 1$ **4.** $e^{2x} = \dfrac{1}{e}$ **5.** $e^{-3x+4} + 1 \leq 2$

2.3 Fonctions composées

Propriété 11

Pour tous réels $a,b \in \mathbb{R}$ fixés, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = ae^{ax+b}.$$

Démonstration. Cela vient de la formule de la dérivée d'une fonction composée. □

Application 4

Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes.

a) $f(t) = 7e^{-4t}$ **b)** $g(x) = \dfrac{e^{1-5x}}{x^2}$ **c)** $h(t) = (3t-2)e^{\frac{1}{6}t}$

Application 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4xe^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f. Préciser son extremum.