Chapitre 2 : Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

On considère f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit a un réel appartenant à I et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

1.1 Nombre dérivé et taux de variation

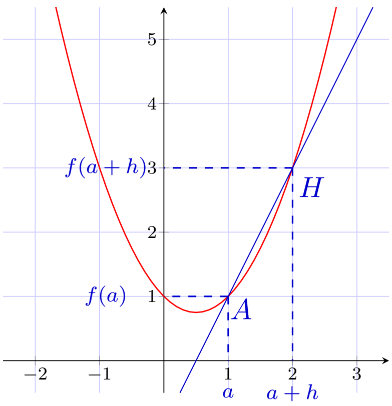
Soient $h \in \mathbb{R}$ un réel non nul tel que $a+h \in I$ et H le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$. En particulier : $a \neq a+h$.

Définition 1 (Taux de variation)

Le nombre $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **taux de variation** de f entre a et $a+h$. Sur la figure ci-contre, le point A a pour coordonnées $(a; f(a))$ et le point H a pour coordonnés $(a+h; f(a+h))$.
Le coefficient directeur de la droite (AH) est

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a};$$

autrement dit, le coefficient directeur est $\tau(h)$. Le nombre $\tau(h)$ dépend de a.



Remarque

Le taux de variation est aussi appelé **taux d'accroissement** entre a et $a+h$.

Définition 2 (Nombre dérivée et dérivabilité)

On dit que f est **dérivable** en a lorsque $\tau(h)$ tend vers un nombre réel quand h prend des valeurs proches de 0. Ce réel est appelé **nombre dérivée** de f en a et est noté $f'(a)$. On écrit alors

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple 1

Soit $f : x \mapsto 2x+1$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Alors $f(a) = 2a+1$ et $f(a+h) = 2(a+h)+1 = 2a+2h+1$. Ainsi, pour tout $h \neq 0$ et tout $a \in I$, on a

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2a+2h+1-(2a+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

On a ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 2$. On dit que la fonction f est dérivable au point a et que son nombre dérivé en a vaut $f'(a) = 2$.

Exemple 2

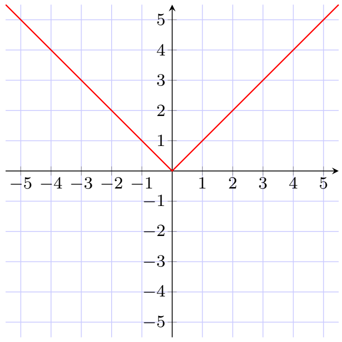
Soit $f : x \mapsto x^2$. Pour $h \neq 0$ et $a = 0$, $\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$. On a $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exemple 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$. Pour $h \neq 0$ et $a = 0$,

$$\tau(h) = \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Pour $h > 0$, $\tau(h) = \frac{h}{h} = 1$, et pour $h < 0$, $\tau(h) = \frac{-h}{h} = -1$. On obtient deux nombres différents quand h prend des valeurs proches de 0, donc g n'est pas dérivable en 0.



Application 4

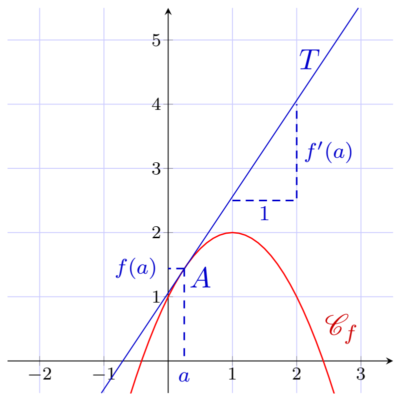
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

1. Soit h un réel non nul. Calculer $f(3+h)$ et $f(3)$.
2. Montrer que f est dérivable en 3 et déterminer le nombre dérivé de f en 3.

1.2 Tangente à une courbe

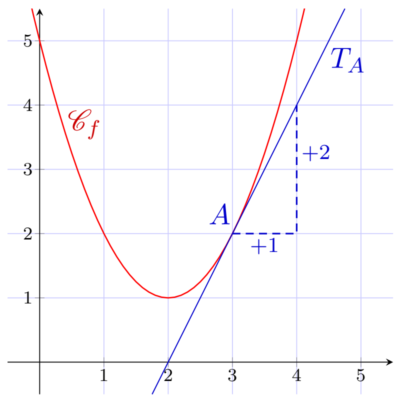
Définition 3 (Tangente)

Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a; f(a))$ dont le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$.



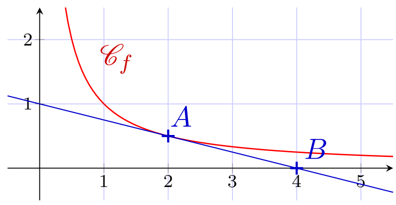
Exemple 5

On donne la courbe d'une fonction f dérivable en 3, dont on a tracé la tangente T_A au point d'abscisse 3. Par lecture graphique, on a $f'(3) = 2$.



Application 6

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ dont on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$. La doite (AB) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.
Déterminer graphiquement $f'(2)$.



2 Équation de tangente

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a. L'équation réduite de la tangente T_A à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Démonstration. Soit T_A la tangente au point A d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$. Par définition, le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente, et elle a donc pour équation

$$y=f'(a)x+p,$$

où le nombre p est l'ordonnée à l'origine et reste à déterminer. Comme le point $A(a;f(a))$ appartient à T_A, ses coordonnées vérifient l'équation réduite de T_A. On a donc

$$f(a)=f'(a)\times a+p \iff p=f(a)-f'(a)\times a.$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation réduite de T_A et en factorisant par $f'(a)$, on a bien

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

□

Exemple 7

Soit f une fonction telle que $f(1)2$ et $f'(1)=\frac{1}{3}$. La tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1 a donc pour équation réduite

$$y=f'(1)(x-1)+f(1).$$

Cela donne

$$\begin{aligned} & y=\frac{1}{3}(x-1)+2 \\ \Leftrightarrow\ & y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+2 \\ \Leftrightarrow\ & y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Application 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+x-1$. En remarquant que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x^2+1)$:

1. déterminer la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ;
2. en déduire les coordonnées du point d'intersection de T avec l'axe des ordonnées.

3 Fonctions dérivées

Définition 4 (Fonction dérivée)

On dit que f est **dérivable sur un intervalle** I lorsque f est dérivable en tout réel a de I. On appelle **fonction dérivée** de f la fonction qui, à tout réel x de I, associe le réel $f'(x)$. On la note f'.

3.1 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 2

Fonction f définie par :	Ensemble de définition D_f	Fonction dérivée f' définie par :	Ensemble de dérivabilité $D_{f'}$
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exemple 9

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a

$$g'(x) = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3}.$$

Exemple 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 5$. Alors

$$f'(x) = 4.$$

Exemple 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Alors

$$f'(x) = 3x^2.$$

Exemple 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$. Alors

$$f'(x) = 5x^4.$$

Remarque

Attention, la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur tout son ensemble de définition ! Elle est définie sur $[0;+\infty[$ mais elle est dérivable sur $]0;+\infty[$. Autrement dit, elle n'est pas dérivable en 0.

3.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 3

Soient u, v et g des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Soient k, a et b des réels.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme	$u+v$	$(u+v)'=u'+v'$
Dérivée d'un produit par une constante	$k\times u$	$(k\times u)'=k\times u'$
Dérivée d'un produit	$u\times v$	$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
Dérivée d'un inverse	$\frac{1}{v}$ avec $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un quotient	$\frac{u}{v}$ avec $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
Dérivée de $f(x)=g(ax+b)$: soit J l'intervalle tel que pour tout $x\in J$, $ax+b\in I$. La fonction f est définie et dérivable sur J et $f'(x)=a\times g'(ax+b)$.		

Exemple 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-5x^2+2x-1$. En tant que fonction polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f'(x)=12x^2-10x+2.$$

Exemple 14

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x)=\frac{4+x^2}{x+1}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en tant que fonction rationnelle, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a

$$g'(x)=\frac{2x(x+1)-(4+x^2)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}.$$

Application 15

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.
Donner l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de la fonction f.

Application 16

Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble I.
2. Justifier que f est dérivable en précisant l'ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.