2.2 Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un même univers, tous deux de probabilité non nulle.

Définition 5 (Probabilité conditionnelle)

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A s'est déjà réalisé se note $P_A(B)$ et est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 11

On reprend le même tableau que dans les premiers exemples. On choisit une personne au hasard et on considère l'événement C : « la personne va régulièrement au cinéma » et S : « la personne fait régulièrement du sport ». On utilise le tableau pour trouver que

$$P_{\overline{C}}(S) = \frac{12}{65}.$$

	S	$\overline{S}$	**Total**
C	20	15	35
$\overline{C}$	12	53	65
Total	32	68	100

La probabilité de choisir une personne faisant du sport de manière régulière sachant que la personne choisie ne va pas régulièrement au cinéma est de $\frac{12}{65}$.

Application 12

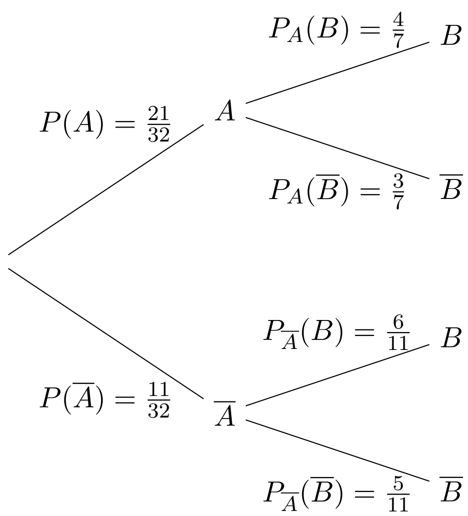
On reprend de nouveau l'application concernant la classe de 32 élèves. On choisit une personne au hasard dans cette classe et on note A l'événement « la personne choisie suit la spécialité HGGSP » et B l'événement « la personne choisie est un garçon ».

1. Calculer la probabilité que la personne choisie soit un garçon, sachant qu'elle suit la spécialité HGGSP.
2. Calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

Définition 6 (Arbre de probabilités)

Lorsqu'on réalise une expérience aléatoire mettant en jeu plusieurs événements, il est plus facile d'organiser les différentes issues en utilisant un **arbre de probabilités.** La première série de branche sépare les issues selon la réalisation du premier événement, la deuxième série de branche selon le deuxième événement, *etc.*

On indique sur chaque branche de l'arbre la probabilité correspondante comme indiquée sur l'arbre ci-contre. Les probabilités du deuxième niveau de l'arbre sont des probabilités conditionnelles.



Exemple 13

L'arbre ci-dessus correspond à l'application avec la classe de 32 élèves et les événements A « la personne choisie suit la spécialité HGGSP » et B l'événement « la personne choisie est un garçon ».

Propriété 3

Un arbre de probabilité satisfait certaines propriétés.

1. La somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
2. On appelle **chemin** une suite de branches décrivant une succession d'événements. La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités situées sur les branches qui le composent.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Définition 7 (Indépendance)

Les événements A et B sont dits **indépendants** lorsque

$$P_A(B) = P(B),$$

ou, de manière symétrique, lorsque

$$P_B(A) = P(A).$$

Remarque

Intuitivement, cela signifie que la probabilité que B se réalise ne dépend pas de la réalisation de l'événement A.

Application 14

En conservant le même exemple (la classe de 32 élèves), montrer que les événements A et B ne sont pas indépendants.