Chapitre 1 : Croissance linéaire

1 Suites arithmétiques

Définition 1 (Suite)
Une **suite** u est une fonction dont la variable, notée n plutôt que x, est un entier naturel. Le nombre $u(n)$ est appelé **terme de rang** n de la suite u.

Définition 2 (Suite arithmétique)
Une suite u est **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r, nommé **raison**, tel que pour tout entier naturel n, on a

$$u(n+1) = u(n) + r.$$

L'écriture du terme de rang $n+1$ en fonction du terme de rang n donne une **relation de récurrence** vérifiée par la suite.

Exemple 1
Soit u une suite vérifiant $u(0) = 5$ et pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + 4$. On a alors

$$u(1) = \qquad u(2) = \qquad u(3) =$$

Remarque
Attention, le **premier terme** de la suite est $u(0)$, le **deuxième terme** $u(1)$, etc. Donc le dixième terme est $u(9)$.

Propriété 1
Une suite u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$ si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a

$$u(n) = u(0) + r \times n.$$

Cette écriture est la **forme explicite** de la suite u.

Exemple 2
Soit u la suite de raison $r = 3$ et de premier terme $u(0) = -1$. On a alors

$$\begin{array}{rr} u(1) = -1 + \ldots \times \ldots = & u(2) = -1 + \ldots \times \ldots = \\ u(3) = -1 + \ldots \times \ldots = & u(4) = -1 + \ldots \times \ldots = \\ u(37) = -1 + \ldots \times \ldots = & u(100) = -1 + \ldots \times \ldots = \end{array}$$

Remarque
La **forme explicite** permet de calculer n'importe quel terme **directement.** Au contraire, la **relation de récurrence** permet de calculer les termes **les uns à la suite des autres**.

Propriété 2

Dans un repère, une suite peut être représentée par le nuage de points de coordonnées $(n, u(n))$, $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas d'une suite arithmétique, ce nuage de points forme un ensemble de points alignés.

Exemple 3

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u(0) = 2$ et de raison $r = 3$. Elle est donc définie par la relation de récurrence

$$u(n+1) = u(n) + \dots.$$

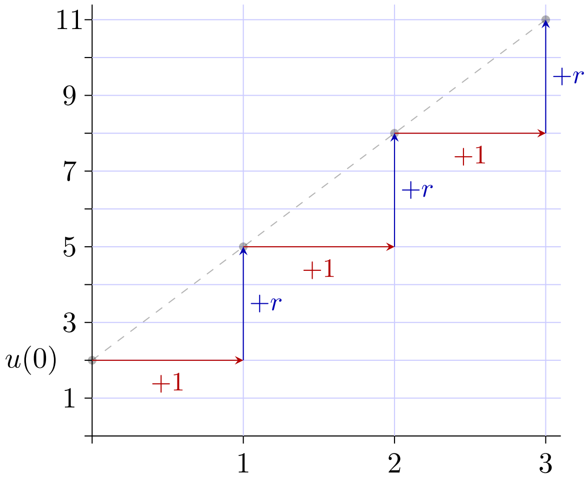
Sa forme explicite est donnée, pour tout entier naturel n, par

$$u(n) = \dots + \dots \times \dots.$$

On a aussi

$u(1) =$ $u(2) =$ $u(3) =$

Les quatre premiers termes de cette suite sont représentés dans le graphique ci-dessous. Ils sont alignés sur la droite d'équation $y = 3x + 2$.



Remarque

Une suite arithmétique permet de modéliser un phénomène **discret à croissance linéaire**.

Propriété 3

1. Une suite arithmétique u de raison r est **strictement croissante** si, et seulement si, $r > 0$.
2. Une suite arithmétique u de raison r est **strictement décroissante** si, et seulement si, $r < 0$.
3. Une suite arithmétique u de raison r est **constante** si, et seulement si, $r = 0$.

Exemple 4

Soit u la suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u(0) = 5$. On a alors

$u(1) =$ $u(2) =$ $u(3) =$

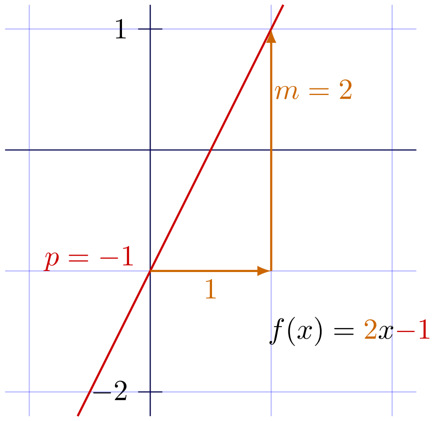
$u(4) =$ $u(5) =$ $u(6) =$

Cette suite est **strictement décroissante**.

2 Fonctions affines

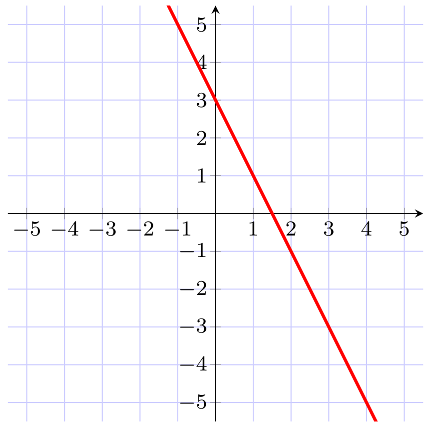
Définition 3 (Fonction affine)

Une fonction f est fite **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = mx + p.$$
La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère du plan est une droite dont m est le **coefficient directeur** et p est l'**ordonnée à l'origine**. On a $p = f(0)$.



Exemple 5

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 3 - 2x.$$
Dans ce cas le coefficient directeur de f est
$$m =$$
et son ordonnée à l'origine vaut
$$p =$$
La représentation graphique de f est donnée ci-contre.



Remarque

Une fonction affine permet de modéliser un phénomène **continu à croissance linéaire**.

Propriété 4

Soit : $x \mapsto mx + p$ une fonction affine dont on note d la droite représentative.

1. Pour tous réels distincts a et b, on a
$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
2. Pour tous points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartenant à d, on a
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Propriété 5

1. Une fonction affine f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m > 0$.
2. Une fonction affine f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m < 0$.
3. Une fonction affine f est **constante** sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m = 0$.