Chapitre 3 : Croissance exponentielle

1 Suites géométriques

1.1 Définition

Définition 1 (Suite géométrique)

Une suite u est **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel $q \in \mathbb{R}$, nommé **raison**, tel que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u(n+1) = u(n) \times q.$$

Remarque

Dans ce chapitre, on se limite au cas où $u(0) > 0$ et $q > 0$. On voit donc des suites à termes positifs uniquement.

Remarque

Il ne faudra pas confondre la raison d'une suite arithmétique et la raison d'une suite géométrique !

Exemple 1

Soit u la suite définie par $u(0) = 32$ et, pour tout entier n, par $u(n+1) = u(n) \times 0{,}5$. Alors la suite u est une suite **géométrique** de premier terme 8 et de raison $q = 0{,}5$.
Les premiers termes sont

$u(0) = 32$ $\quad$ $u(1) = 32 \times 0{,}5 = 16$ $\quad$ $u(2) = 16 \times 0{,}5 = 8$

$u(3) = 8 \times 0{,}5 = 4$ $\quad$ $u(4) = 4 \times 0{,}5 = 2$ $\quad$ $u(5) = 2 \times 0{,}5 = 1$

$u(6) = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$ $\quad$ $u(7) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ $\quad$ $u(8) = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

$u(9) = \ldots$

Exemple 2

Soit u une suite géométrique de premier terme 0,1 et de raison $q = 3$. Les premiers termes sont alors

$u(0) = 0{,}1$ $\quad$ $u(1) = 0{,}3$ $\quad$ $u(2) = 0{,}9$ $\quad$ $u(3) = 2{,}7$ $\quad$ $u(4) = 8{,}1$

$u(5) = 24{,}3$ $\quad$ $u(6) = 72{,}9$ $\quad$ $u(7) = 218{,}7$ $\quad$ $u(8) = 656{,}1$ $\quad$ $u(9) = \ldots$

Application 3

Soit u la suite définie par $u(0) = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u(n+1) = u(n) \times 1{,}5$.

1. La suite u est-elle géométrique ? Quel est son premier terme ? Sa raison ?
2. Donner les termes $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.

Propriété 1

Si u est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u(0) > 0$, alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u(n) = u(0) \times q^n.$$

Remarque

Comme dans le cas des suites artihmétiques, la relation de récurrence $u(n+1) = u(n) \times q$ permet de calculer les termes les uns après les autres, alors que la forme explicite $u(n) = u(0) \times q^n$ permet de calculer n'importe quel terme directement !

1.2 Sens de variation

Propriété 2

Une suite géométrique u de premier terme $u(0) > 0$ et de raison $q > 0$ est

— **strictement croissante** si, et seulement si, $q > 1$;

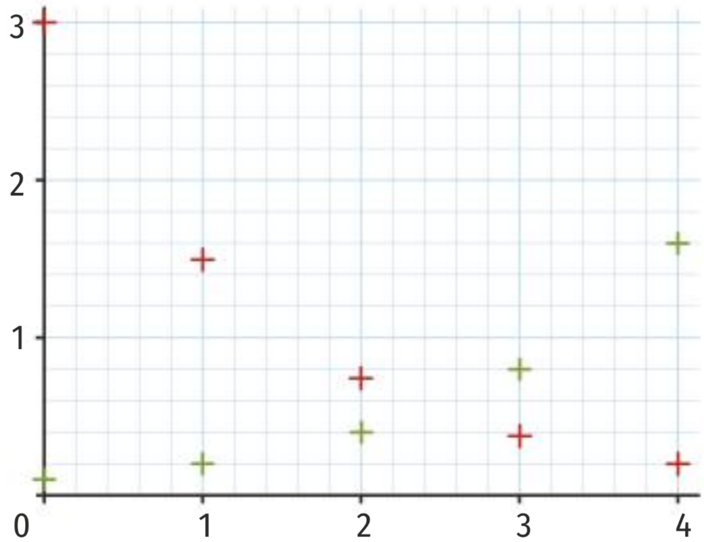
— **strictement décroissante** si, et seulement si, $q < 1$;

— **constante** si, et seulement si, $q = 1$.

Exemple 4

— **En rouge**, le nuage de points associé à la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 3$ et de raison $q = 0{,}5$. On a $0 < 0{,}5 < 1$ donc la suite u est décroissante. Cela se vérifie sur les premiers termes : $u(0) = 3$, $u(1) = 1{,}5$, $u(2) = 0{,}75$, *etc.*

— **En vert**, le nuage de points associé à la suite géométrique v de premier terme $v(0) = 0{,}1$ et de raison $q = 2$. Ici, on a $2 > 1$ donc la suite v est croissante. Cela se vérifie sur les premiers termes : $v(0) = 0{,}1$, $v(1) = 0{,}2$, $v(2) = 0{,}4$, *etc.*



Application 5

1. Donner le sens de variation de la suite u définie par $u(n+1) = u(n) \times \frac{4}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par $u(0) = 0{,}9$.
2. Donner le sens de variation de la suite v définie par $v(n+1) = v(n) \times \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par $v(0) = 1{,}1$.

2 Fonctions exponentielles

2.1 Définitions et variations

Définition 2 (Fonction exponentielle)

Soit $a > 0$ un réel strictement positif. Une fonction f définie pour tout réel $x \geq 0$ par

$$f(x) = a^x$$

est une **fonction exponentielle**.

Exemple 6

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 2^x.$$

La fonction f est une fonction exponentielle avec $a = 2$. On a

$$f(0) = 2^0 = 1 \qquad f(1) = 2^1 = 2 \qquad f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(1{,}5) = 2^{1{,}5} \approx 2{,}83 \qquad f(2{,}1) = 2^{2{,}1} \approx 4{,}29 \qquad f(19{,}81) = 2^{19{,}81} \approx 919188$$

Application 7

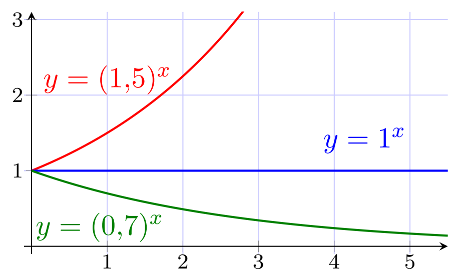
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ par $g(x) = 3^x$.

1. Sans la calculatrice, donner les valeurs $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
2. Avec la calculatrice, donner les valeurs $f(0{,}5)$, $f(1{,}9)$, et $f(2{,}01)$.

Propriété 3

Une fonction exponentielle f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = a^x$, avec $a > 0$ est :

1. **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $a > 1$;
2. **strictement décroissante** sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $0 < a < 1$;
3. **constante** sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $a = 1$.



2.2 Propriétés algébriques

Propriété 4

Pour tous réels positifs x et y et pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

1. $a^x \times a^y = a^{x+y}$ **2.** $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$(avec $x \geq y$) **3.** $(a^x)^y = a^{x\times y}$

4. $(a^x) \times b^x = (a \times b)^x$ **5.** $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Exemple 8

1. $2^2 \times 2^{3{,}1} = 2^{2+3{,}1} = 2^{5{,}1}$ **2.** $\dfrac{3^4}{3^{2{,}7}} = 3^{4-2{,}7} = 3^{1{,}3}$ **3.** $\left(5^{1{,}5}\right)^2 = 5^{1{,}5\times 2} = 5^3$

4. $2^{1{,}4} \times 3^{1{,}4} = (2\times 3)^{1{,}4} = 6^{1{,}4}$ **5.** $\dfrac{2^{0{,}5}}{3^{0{,}5}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0{,}5}$

Remarque

Ces règles étaient déjà connues dans le cas où x et y sont des entiers, on généralise les propriétés à n'importe quels nombres réels positifs.

Propriété 5 (Cas particulier de la puissance $\frac{1}{n}$)

Soit $a > 0$ et $x > 0$ deux nombres réels strictement positifs et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul. L'équation $x^n = a$ admet comme unique solution le réel

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

appelé **racine n-ième** de a.

Exemple 9

On considère l'équation

$$x^3 = 7.$$

Cette équation admet pour solution $x = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7} \approx 1{,}91$.

Application 10

1. Résoudre (à l'aide de la calculatrice) l'équation $x^6 = 150$.
2. Résoudre (à l'aide de la calculatrice) l'équation $2x^3 - 25 = 75$.

Propriété 6

Si une grandeur subit une évolution de taux t, alors elle atteint la même valeur en subissant n évolutions successives de même taux $(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

Définition 3 (Taux moyen)

Le nombre

$$(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$$

est appelé **taux moyen** des n évolutions successives de taux global t.

Exemple 11

D'après l'association 60 Millions de consommateurs, le prix des pâtes a augmenté d'environ 11,4% entre Février 2021 et Février 2022. On calcule ainsi

$$t_{\text{moyen}} = \left(1 + \frac{11{,}4}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}00904 \approx 0{,}904\%.$$

Cela signifie qu'en moyenne, entre Février 2021 et Février 2022, le prix des pâtes a augmenté de 0,904% par mois.

Application 12

Esther a placé 1000 euros en bourse en 2018. Quatre ans plus tard, en 2022, elle vend ses actions et récupère 1427 euros.

1. Calculer le taux d'évolution associé à son placement en bourse.
2. Calculer le taux moyen d'augmentation par année.