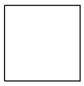
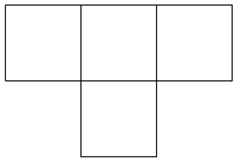
On considère un carré de côté 1. On réalise plusieurs figures successives en ajoutant des carrés identiques à chaque étape comme indiqué ci-dessous.

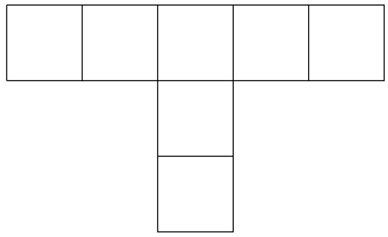
Figure initiale



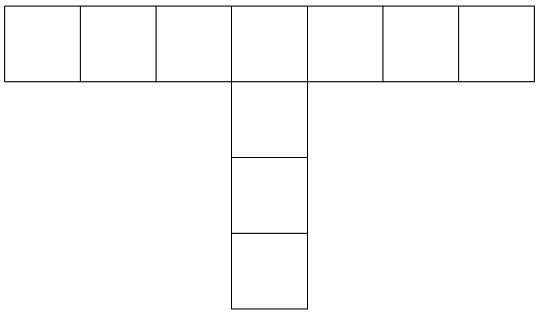
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Questions

Première partie : construction d'une suite. On note $c(n)$ le nombre de carrés nécessaires pour construire la figure à l'étape n. La figure initiale correspond à l'étape 0. Le premier terme est donc $c(0) = 1$ et on a, par exemple, $c(2) = 7$.

1. En utilisant l'illustration ci-dessus, déterminer $c(1)$ et $c(3)$.
2. Combien de carrés ajoute-t-on pour passer d'une étape à la suivante ? Calculer alors $c(4)$ et $c(5)$.

En continuant ainsi, on obtient une suite denombres, notée c. Dans ce cas, on dit que la suite c est une **suite arithmétique** de **premier terme** $c(0) = 1$ et de **raison** $r = 3$.

3. Pour tout entier naturel n, écrire $c(n+1)$ en fonction de $c(n)$. Cette relation s'appelle la **relation de récurrence** de la suite c.
4. Comment calculer $c(100)$ en fonction de $c(99)$? Est-ce facilement réalisable ?

Deuxième partie : une nouvelle suite. On s'intéresse maintenant au périmètre de la figure à chaque étape. On note $p(n)$ le périmètre de la figure à l'étape n. On a ainsi $p(0) = 4$ et $p(1) = 10$.

5. En utilisant l'illustration ci-dessus, déterminer $p(2)$ et $p(3)$.
6. Justifier que la suite p est une suite arithmétique. Donner alors le premier terme, la raison et la relation de récurrence de $p(n+1)$ en fonction de $p(n)$.
7. (a) De quelle longueur le périmètre a-t-il augmenté entre l'étape initiale et l'étape 2 ? Entre l'étape initiale et l'étape 3 ?
   (b) Recopier et compléter les égalités suivantes $p(2) = p(0) + \ldots \times 6$; $p(3) = p(0) + \ldots \times 6$.
   (c) Compléter la **forme explicite** de p : pour tout entier naturel n, $p(n) = p(0) + \ldots \times \ldots$.
8. Calculer le périmètre de la figure à l'étape 100.

Bilan

On considère une suite arithmétique u. Quels en sont les éléments caractéristiques ? Donner une relation de récurrence de u et une forme explicite.